

ЛЕКЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ «KAZCAS-16»

---

**В.М. Журавлев**

**О топологической теории полей и частиц**

---



---

Казань, Казанский федеральный университет, 5–7 ноября 2016

УДК 519.61

## О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ И ЧАСТИЦ

В.М. Журавлев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> zhvictorm@gmail.com; Ульяновский государственный университет

*В лекции излагается новый подход к построению теории электромагнитного и гравитационного взаимодействий на основе геометрической интерпретации соответствующих полей с привлечением топологических инвариантов для описания электрических зарядов.*

**Ключевые слова:** общая теория относительности, геометризация материи, геометризация электродинамики, квантовая теория, теория гравитации, топология, заряд, массы, элементарные частицы.

### Лекция 1

#### Что мы знаем и чего не знаем о материи?

##### 1. Краткая история рождения и болезней квантовой теории

###### 1.1. Строение материи

Теория, о которой пойдет речь, является попыткой разрешить проблемы, которые встали перед физикой в XX веке, когда ученым удалось разобраться в том, что происходит на очень малых расстояниях, которые сейчас принято называть атомными и субатомными. В XX веке физикам удалось создать приборы и провести эксперименты, в которых было показано, что вещество состоит из атомов и молекул, а сами атомы и молекулы состоят из еще более “элементарных частиц”. Такие частицы иногда называют субатомными. В XX веке пришлось изобретать новый термин для частиц, из которых состоят атомы – “элементарные”, поскольку само слово “атом” в переводе с древнегреческого языка означает “неделимый”. Атом оказался делимым, а в последствие делимыми оказались и субатомные частицы.

Хотя о том, что вещество состоит из атомов и молекул, догадывались еще в Древней Греции (Левкипп и Демокрит), тем не менее даже в XIX веке еще не было абсолютно и строго доказанных фактов об атомно-молекулярном строении вещества.

В XVIII веке одним из основоположников атомно-молекулярного учения был наш великий соотечественник Михаил Васильевич Ломоносов, 300-летие которого мы отмечаем в 2013 году.

Работы ученых XVIII и XIX веков дали много оснований для того, чтобы построить атомно - молекулярную теорию вещества, но только почти сто лет назад в 1913 году на Втором Сольвеевском конгрессе было объявлено об окончательно установленных фактах, подтверждающих строго атомно-молекулярное строение веществ. Основными фактами стали - теория растворов (много авторов), объяснение броуновского движения Эйнштейном и планетарная модель атома Резерфорда. Однако успешное завершение более чем двух тысячелетней истории атомов в 1913 году по-

служило рождению новой истории о строении самих атомов, а затем и элементарных (субатомных) частиц. Первыми в этой истории появились электроны ( $\beta$ -лучи), затем  $\alpha$ -частицы, и  $X$ -лучи, а затем и  $\gamma$ -лучи. Планетарная модель атома Резерфорда подразумевала, что атом устроен совсем не элементарно и состоит из положительно заряженного ядра и электронов, которые его окружают наподобие планет, которые вращаются вокруг Солнца. Однако первые же шаги такого представления об атомах вошли в противоречие с классическими законами, которые управляют движением вещества на привычных нам масштабах, которые принято называть - макромасштабами. Эти противоречия заставили физиков строить новую теорию движения субатомных частиц, которая в настоящее время называется квантовой теорией.

### **1.2. Квантовая теория**

Годом создания квантовой теории считается 1926 год, когда Вернер Гейзенберг опубликовал статью, в которой объяснил то, как можно рассчитать спектры излучения атомов, основываясь на новой системе квантовых постулатов. Эта статья завершила этап возникновения квантовой теории, началом которого можно считать работу Планка о спектре излучения абсолютно черного тела, появившуюся в 1900 году. Теория бурно развивалась после 1926 года вплоть до начала Второй Мировой Войны. Эта эпоха так и называется в физике - "Эпоха бури и натиска". В это время были записаны фундаментальные постулаты квантовой теории, которых пришлось вводить намного больше, чем в классической механике. Найдены уравнения, описывающие движение субатомных частиц - электронов и некоторых других частиц. Это уравнения Шредингера и Дирака. Было обнаружено, что ядра атомов состоят из протонов и нейтронов, а все частицы должны иметь своих антиподов - античастицы. В это же время были обнаружены процессы радиоактивного распада, явления ядерного синтеза, с помощью которого удалось объяснить "горение" звезд. Но и результатом этих открытий стало создание атомной и ядерной бомб. Было открыто и объяснено множество других явлений. Однако зародившаяся новая квантовая теория была создана на основе нескольких не совсем ясных до сих пор принципов и содержит несколько фундаментальных проблем, которые не разрешены в ней до сих пор.

Неясными принципами были и остаются в квантовой теории способы интерпретации того, что же происходит с субатомной частицей, когда над ней производят измерение. До квантовой механики физик, пытаясь измерить то или иное свойство физической системы, полагал, что результат эксперимента можно заранее предсказать, если строго контролировать все внешние условия проведения эксперимента. Это иногда сделать очень сложно, например, из-за того, что установка сотрясается из-за проезжающих недалеко автомобилей. В других случаях не удастся исключить воздействие молекул окружающей среды, которые находятся в постоянном тепловом движении и т.д. Но во всех этих случаях физик знал, что такого рода неконтролируемые воздействия порождены не чем-то абсолютно фундаментальным, не поддающимся пониманию, а вполне ясными взаимодействиями одних тел с другими. Поэтому считалось, что, во-первых, такое воздействие можно уменьшать с помощью разных ухищрений, а, во-вторых, его можно учесть с помощью прове-

дения множества одинаковых измерений. Однако квантовая механика смешала все карты! Выяснилось, что результат эксперимента, даже самого тщательно подготовленного, часто нельзя предсказать однозначно. Они оказываются случайными или вероятностными. Это можно интерпретировать так, как-будто “кто-то” заставляет субатомные частицы двигаться разными способами не из-за того, что они взаимодействуют по-разному с другими телами, а из-за того, что этот “кто-то” по своему усмотрению заставляет их летать по только ему известным траекториям. При этом физику позволено вычислять все возможные траектории, по которым могут летать частицы, но этот “кто-то” утаивает от экспериментатора - по какой из них он направит частицу в следующий момент.

### 1.3. Кто же этот “кто-то”?

Если где-то нет кого-то,  
Значит кто-то где-то есть!  
Только где же этот кто-то?  
И куда он мог залезть?  
Песенка из мультфильма

У физиков разгорелся не шуточный спор - кто же этот “кто-то”. Он продолжается до сих пор. Многие сразу подумали - а не Бог ли это? Однако идея о том, что Бог стоит за каждым экспериментом в мире и постоянно дурачит физиков, выглядит не очень привлекательной. Ее выразил Эйнштейн словами “Бог не играет в кости!”

Другие пытались на первых порах все свести к старой идее классической механики, что мы просто чего-то не в состоянии контролировать в эксперименте, поэтому и получаются случайные результаты. Однако знаменитый математик Нейман доказал, что такое объяснение не верно почти при всех условиях эксперимента. Победила в 30-х годах XX века идея Нильса Бора о том, что не стоит задумываться о том, кто же этот “кто-то”. Он сказал всем, что мир так уж устроен. В нашем мире маленькие частицы движутся по своим законам. Поэтому их надо просто изучить, научиться вычислять разные вещи, а этот “кто-то” пусть остается инкогнито. Правда Эрвин Шредингер, Луи Де-Бойль и Альберт Эйнштейн так и остались при своем мнении. Э.Шредингер придумал даже мысленный эксперимент с черной кошкой. Согласно этому эксперименту, кошка может погибнуть или остаться жить из-за того, что в эксперименте квантовая частица полетит либо одним, либо другим способом. Это означает, что законы субатомных частиц могут влиять непредсказуемым способом на жизнь кошки. Точно также они могут влиять на жизнь человека, а это уже далеко не электроны и протоны. Тут уж точно надо узнать кто же этот “кто-то”. Вот эта проблема является фундаментальной и требует решения. Хотя не она послужила в качестве толчка к созданию обсуждаемой здесь теории, но эта проблема служила постоянным фоном к восприятию других проблем современной теории частиц.

#### 1.4. Теория гравитации Ньютона

Квантовая механика существенным образом перевернула взгляды физиков на строение мира на малых масштабах. Выявленные свойства субатомных частиц позволили понять буквально сразу множество явлений в макромире, т.е. мире, где нам привычно жить. Кроме этого, было понято множество явлений, происходящих в мире звезд. К концу XX века, основываясь на квантовых законах были установлены основные принципы, лежащие в основе эволюции звезд и галактик. Появилось объяснение таким звездам, как белые карлики или нейтронные звезды, свойства которых существенным образом зависят от квантовых законов, которые управляют движением частиц в них. Однако все эти достижения в макромире были связаны с еще одним явлением - гравитационным взаимодействием или полем, которое к квантовой механике до сих пор имело мало отношения. Понимание, что в окружающем нас мире, привычном нам, действует некая загадочная сила, которая удерживает нас на поверхности Земли, пришла в голову физикам далеко не сразу.

Первым человеком, который стал изучать действие этой силы экспериментально, стал, по всей видимости, великий Галилео Галилей - родоначальник современной физической науки! То, что на все тела вблизи Земли действует некая сила, что заставляет их падать ускоренно, если пренебречь сопротивлением воздуха, он установил с помощью прямых измерений и вычислил ускорение свободного падения тел. Объяснения этой силе он не нашел, но сам факт ее существования вошел в физику как фундаментальный факт. Следующий фундаментальный факт установил не менее великий ученый Исаак Ньютон! Из опытов Галилея следовало, что все тела притягиваются к земле (именно с малой буквы!), но откуда берется эта сила и при- суща она каким-либо другим телам Галилей не знал.

Как говорится в историческом мифе-анекдоте, мысль, что силой притяжения обладают все тела во Вселенной пришла в голову Ньютону вместе с уларом яблока, которое упало на голову Ньютона, когда он сидел под деревом в саду. Однако эта замечательная идея пришла в голову не только Ньютону и, возможно, другим способом. Авторство этой гипотезы оспаривал у Ньютона замечательный ученый Гук. Но в историю идея о том, что все тела притягиваются к друг к другу с силой обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними и пропорционально произведению их масс вошла под именем закона Всемирного тяготения Ньютона.

Этот закон можно записать в виде формулы:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}.$$

В этой формуле  $m_1$  и  $m_2$  - массы частиц,  $r_{12}$  - расстояние между частицами, а  $G$  - фундаментальная постоянная, носящая название гравитационной постоянной Ньютона. Роль этой силы в окружающем нас мире переоценить не возможно. В 60-х годах наш замечательный ученый-физик К.М. Станюкович в содружестве с журналистом М.В. Васильевым написали замечательную книгу - "Сила, что движет мирами". Трудно придумать что-то более точное, чем это определение силы тяготения - Сила, что движет мирами!



### 1.5. Что находится между тяготеющими телами или - Что такое поле?

Теория Ньютона Всемирного тяготения определила развитие физики на последующие три столетия до нашего времени.

**Во-первых**, из этой теории следовало, что **тела влияют друг на друга** не через какие-то промежуточные тела, а **напрямую через пространство**. Причем воздействие от одного тела к другому передается мгновенно. Это теория дальнего действия, которой придерживался сам Ньютон.

**Во-вторых**, из этой формулы следует, что ее величина пропорциональна массе тел - характеристике, которая к тяготению вроде бы не имеет никакого отношения! **Инертная масса** - это параметр, который характеризует, как действие сил сказывается на движении тел и не характеризует сами силы. **Почему же эта масса определяет и то, как все тела притягиваются?**

И, **в-третьих**, почему **сила убывает обратно пропорционально квадрату расстояния?**

Эти вопросы заставили физиков активно сравнивать силу тяготения с другими силами, наблюдаемыми в природе, и по примеру формулы Ньютона стали искать аналогичные формулы для этих сил. Так в последствии появился закон Кулона.

Вместе с тем, большие разногласия стала среди физиков вызывать **теория дальнего действия**. Весь опыт физики, которая строилась на базе механики, которую построил тоже Ньютон, говорил ученым, что так не бывает, чтобы нечто мгновенно переносится в пространстве и влияет на другие тела. Во времена Ньютона или чуть позже были измерены и скорость звука и скорость света (Ремер, Бредли). Это показало, что даже загадочный свет имеет хоть и очень большую, но все же конечную скорость. Более того, свет представляет собой нечто материальное. Он может воздействовать на тела.

Поэтому теория дальнего действия была заменена на другую концепцию - **близкое действие**. Основной ее смысл состоит в том, что воздействие от одного тела к другому передается всегда с помощью чего-то материального и с конечной скоростью. Но как же быть с тяготением? Ведь мы не видим ничего материального между телами. Чтобы эта кажущаяся пустота, но заполненная чем-то, что передает тяготение от тела к телу, не требовала постоянных разъяснений, было предложено назвать это материальное нечто - полем. Понятие поля ввел в обиход физики великий физик XIX века - Майкл Фарадей. Первоначально это понятие он относил к магнитным силам, которые меняют расположение железных опилок вокруг намагниченных тел, делая поле "видимым". Затем это понятие стали относить и к электромагнитным силам и полю тяготения. С тех пор мы постоянно говорим о полях, когда нам надо сказать, что в пространстве между телами есть взаимодействие, которое невидимо передает силу от одного тела к другому. Таких полей сейчас существует множество. Но самыми главными из них являются поле тяготения и электромагнитное поле. Этим полям соответствуют два фундаментальных взаимодействия - сила гравитации и силы электромагнитного взаимодействия. Есть еще силы ядерного взаимодействия, но они не наблюдаемы на больших расстояниях, привычных нам. Однако их действие определяет то, что мы можем существовать! Но об этом мы поговорим позже.

Понятие поля очень помогло физикам в процессе общения друг с другом. Бо-

лее того, проявления некоторых простых полей можно наблюдать воочию. Так, например, железные опилки выстраиваются вдоль силовых линий магнитного поля постоянного магнита, что делает его видимым. Значит, понятие поля не такое уж несуразное. Однако, само слово поле мало что прибавляет к пониманию того, что же происходит в пространстве между телами, когда они взаимодействуют между собой с помощью полей. Особенно это относится к полю тяготения. Это поле вездесуще и пронизывает все насквозь. Оно действует на все тела и всегда только в форме притяжения. Что же это за поле? Ответ на этот вопрос был дан Эйнштейном.

## **2. Как устроено пространство?**

### **2.1. Геометрия или - Где мы живем?**

В предыдущем разделе мы озаботились тем, чтобы понять, что же обеспечивает передачу сил тяготения между телами. Для обозначения такого странного явления физики придумали понятие поля, т.е. чего-то невидимого, что “переносит” через пространство воздействие от одного тела к другому.

Парадоксальным здесь является то, что такое взаимодействие совершенно не зависит от наличия материи между телами. Как мы сейчас знаем, вакуум между планетами, а тем более между звездами, и уж тем более между галактиками, настолько разрежен, что его нельзя создать в земных условиях с помощью различного типа насосов. Значит - это нечто присуще самому пространству, т.е. той сущности которая введена нами для объяснения того, что между материальными телами есть какие-то расстояния.

Буквально это означает, что есть тела, которые соприкасаются, а есть такие, которые не соприкасаются между собой. Более того, есть различного рода объекты - поля, леса, горы, моря, люди, животные, деревья, которых мы не видим с того места, где находимся, но если пройти сто метров, километр, сто километров и т.д., то мы увидим новые поля, горы, реки, моря и т.д. Причем для целого ряда объектов со временем не меняется такая сущность, которую мы называем расстоянием. Мы можем, скажем ехать из одного города в другой на машине с одной скоростью, на лошади с другой, на самолете с третьей, и каждый раз мы будем добираться за разное время. Однако, если умножить скорость на время, то получим, что расстояние всегда будет одним и тем же.

Эта же сущность лежит в основе понимания того, что есть предметы разной длины. Размер клавиатуры у компьютера один, а у стола, на котором стоит компьютер, длина другая. Но опять же, если сравнить клавиатуру или стол утром и вечером, то можно прийти к выводу, что их длины не изменились. Значит, в нашем мире есть нечто постоянное, что очень важно, если мы хотим что-то делать в разных местах и с разными, но похожими предметами. Это свойство протяженности объектов и расстояний до них. Конечно, часть предметов и объектов, например, живые организмы движутся и меняют свои размеры, но это связано с какими-то процессами внутри них. А глобальная структура видимого нами привычного мира обладает жестким “скелетом” протяженностей, который не меняется со временем. Именно так себе представляли мир древние греки.

Сейчас мы знаем, что это не совсем так, но отличия от этих представлений крайне

не значительны, так что человек в обыденной жизни этого не заметит. Этот жесткий костяк мира и стали называть пространством. В работах древнегреческих математиков, в первую очередь Евклида, были установлены простые правила (аксиомы), которым подчиняются различные расстояния и длины в нашем мире. Всю совокупность таких расстояний и свойств, их связывающих, стали называть геометрией или совокупностью метрических отношений между телами. Позже появилось название евклидовой геометрии, когда понадобилось отличать различные костяки возможных миров и их частей с различными свойствами связи расстояний и длин в них. Основным свойством этих правил - аксиом Евклида, является то, что наш мир “прямой”. Конечно, в нем есть и не прямые линии и поверхности, и есть такие, которые очень сложно устроены, например, раковины моллюсков, описания всех свойств таких линий и поверхностей, достаточно вычислить все “прямые” расстояния до точек этой линии или поверхности от некоторой одной заданной точки - начала отсчета, пользуясь правилами Евклида. Поэтому можно условно назвать наше пространство “прямым”. Это, конечно, может понадобиться, если указать какие-то “кривые” миры или геометрии. На протяжении более, чем 2000 лет ученые не представляли себе, что геометрия может быть какой-то другой, отличной от “прямой” или евклидовой.

## **2.2. *Может ли мир быть кривым?***

Первые сомнения в том, что совокупность метрических отношений между объектами всегда подчиняется правилам Евклида, были высказаны нашим замечательным ученым-математиком Николаем Ивановичем Лобачевским. Трудно сказать, что именно послужило толчком к новому взгляду на понимание геометрии, но вполне вероятно, что этим толчком было обдумывание странного понятия “поле”, которое появилось в XIX веке. Раз поле не видимо, но как-то распределено в пространстве, то нельзя ли предположить, что поле и есть свойство самого пространства. Но такой взгляд полностью противоречит представлениям евклидовой, или “прямой” геометрии. Геометрия - это в представлениях ученых жесткий неизменный костяк метрических отношений между материальными телами. Он дан свыше таким, как он есть, и обсуждать здесь нечего.

Однако Лобачевский выяснил, что понятие параллельности прямых на самом деле может быть без особых сложностей распространено на некоторые кривые линии, лежащие на кривых поверхностях. Как определяется параллельность прямых по правилам Евклида? Если прямые разнесены на некоторое расстояние, то единственный способ проверить их параллельность - это взять какой-нибудь кусочек или отрезок одной прямой, перенести его по определенным правилам к другой прямой, и сравнить пренесенный отрезок с таким же отрезком на удаленной прямой. Если отрезки в точности совпадут, то прямые параллельны. Однако в этой методике есть одно слабое место. А как следует устанавливать правила переноса отрезков для их сравнения? При переносе, если Вы не ориентируетесь по внешним предметам, вы можете запросто случайно изменить направление отрезка и Ваше сравнение будет не верным! Как быть? Самый простой способ - это “разлиновать” ту местность, через которую Вы проносите отрезок параллельными прямыми. Тогда при переносе Вы можете постоянно сравнивать направление своего отрезка с отрезками линий, нарисованных на местности. В этом случае Вы не ошибетесь! В результате процесс



сравнения становится вроде бы понятным и ясным. Однако и здесь все не так просто. Можно себе представить такую ситуацию. Вы поручили кому-то разлиновать местность параллельными прямыми перед тем, как Вы решили проверить параллельность некоторых прямых. Но Вам попался шутник. Он взял и линии слегка сделал не параллельными, так что Вы этого без специальной проверки не обнаруживаете. В результате, проведя эксперимент, Вы можете сделать неверный вывод. Но такую ситуацию можно исключить с помощью проверки в евклидовом пространстве и пожуришь шутника. А что будет, если взять такую местность, на которой в принципе нельзя нарисовать в обычном смысле прямые? Тогда понятие параллельных становится вообще не ясным. В качестве такой местности Лобачевский взял псевдосферу (см. рис.).

Но можно было бы взять и обычную сферу. Все линии, которые можно провести на псевдосфере (сфере), являются кривыми с точки зрения зрителя, смотрящего на эту сферу извне. Поэтому, если мы разлинуем сферу (псевдосферу) с помощью того же метода, что и в случае евклидова пространства, как это представлено на рисунке, то получим совокупность кривых, которые можно назвать параллельными. Проверка параллельности по старому рецепту переноса не выявит никаких отличий от такой же процедуры в евклидовом пространстве. Но парадоксальным при этом оказывается факт, что эти параллельные пересекутся, что явно противоречит пятому правилу-аксиоме Евклида. Лобачевский первым понял, что за этим стоит важнейший принцип, который должен быть перенесен с абстрактных поверхностей на окружающий нас мир.

Фундаментальным вопросом теперь уже не математики, а именно физики, должен стать вопрос - а можно ли вообще провести в нашем мире строго прямые параллельные, которые могли бы служить основой проверки параллельности? Лобачевский об этом и заявил - такая проверка может быть осуществлена только экспериментально. Был даже установлен простой способ такой проверки. Это вычисление суммы углов в треугольнике, стороны которого строятся по принципу прямых в евклидовой геометрии. Для псевдосферы такая сумма должна быть меньше  $180^\circ$  градусов, а для сферы - больше  $180^\circ$ .

Таким образом, впервые было заявлено, что наш мир может быть "кривым"! Но это надо проверять, чем и должна заниматься физика. Но раз геометрия может быть кривой, то она может быть кривой по - разному! А раз так, то поле вполне может оказаться свойством "кривизны" пространства. Однако для этого надо понять то, как могут отличаться друг от друга "кривые" пространства.

### **2.3. Что такое кривизна?**

Надо отметить, что ученые - современники Лобачевского, далеко не сразу восприняли идеи Лобачевского. Однако был один замечательный ученый математик и физик XIX века - Иоганн Карл Фридрих Гаусс, который сразу понял важность открытия, сделанного Лобачевским.

Он сразу сам решил проверить - является ли наш мир прямым (сейчас часто говорят - плоским) или он является кривым. Для этого надо было измерить сумму углов треугольника, но какого? Если измерять сумму углов треугольника, нарисованного на бумаге или на другой ровной поверхности, то результат известен еще с древ-



**Рис. 1.** Николай Иванович Лобачевский 1792-1856



**Рис. 2.** Иоган Карл Фридрих Гаусс 1777-1855

ней Греции - сумма углов будет равна -  $180^\circ$ . Так какой же треугольник надо брать? Гаусс понял, что искать искривления надо на достаточно больших расстояниях, где нет заранее заданных поверхностей, а есть пустое пространство. Пустого пространства, т.е. то что мы сейчас называем вакуумом вблизи поверхности Земли нет. Но можно предположить, что воздух не будет сильной помехой для измерения углов треугольника больших размеров. Поэтому Гаусс расположил три небольших увеличительных (подзорные) трубы на вершинах трех гор в городе Гёттингене, где он тогда жил, работал и был директором Гёттингенской обсерватории. Расстояние между увеличительными трубами составляло примерно 40 км. С помощью этих увеличительных труб, которые сейчас принято называть в строительном деле - теодолитами, измерялась сумма углов треугольника, образованного прямыми, соединяющими увеличительные трубы. Оказалось, что сумма углов не отличается от  $180^\circ$ .

Таким образом Гаусс первым проверил, что наш мир евклидов на расстояниях порядка десятков километров! Следует, правда, признать, что такие измерения могут содержать существенные ошибки, если воздух между горами был нагрет не равномерно. В этом случае лучи света движутся не по прямым, а по искривленным траекториям. Это связано с изменением показателя преломления воздуха. Примером могут служить миражи, которые часто можно наблюдать в жаркую погоду над разогретой асфальтовой дорогой, или миражи, о которых сообщают путешественники, проходившие через пустыни.

Хотя результат измерений, проведенных Гауссом, дал отрицательный результат, тем не менее идея о том, что геометрии могут быть разными, а не только евклидо-

вой, постепенно стала завоевывать умы ученых. Если Лобачевского не понимали, Гаусс упоминал о работах Лобачевского и о своих трудах в этом направлении очень осторожно, то во второй половине XIX века появилась целая плеяда молодых ученых, которые не только восприняли эту идею, но и развили новую теорию. Однако заслуги Гаусса не заканчивались на проведении измерений суммы углов треугольника. Гаусс ввел понятие кривизны поверхности, которое помогает выяснять то, как различаются разные кривые геометрии.

Как показал Гаусс, существует важная количественная характеристика искривления поверхности - называемая сейчас гауссовой кривизной. Смысл ее показан на рисунке. В каждой точке поверхности можно провести две "главные" линии, пересекающиеся в этой точке. На рисунке точка, где производится вычисление гауссовой кривизны, находится на месте пересечения двух черных кривых. Вблизи этой точки кривые почти не отличаются от участков окружностей с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , соответственно. Если Вы сумели вычислить радиусы этих окружностей, а это делается по уже известным сравнительно простым правилам, то гауссова кривизна  $K$  равна по определению произведению обратных радиусов:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Другая величина  $H$ , равная сумме обратных величин радиусов:

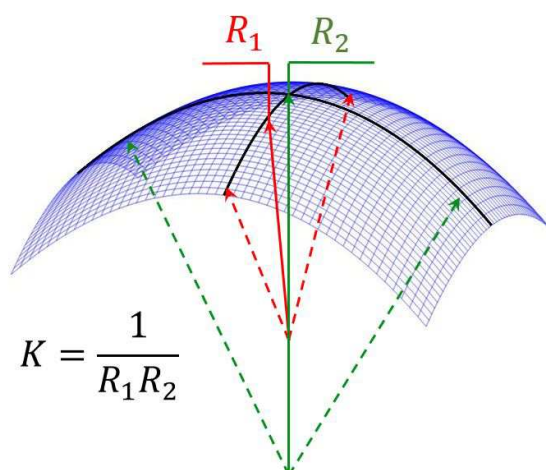
$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

называется средней кривизной поверхности в данной точке. Средняя и гауссова кривизна поверхностей быстро попали в обиход физики. Так средняя кривизна входит в формулу Лапласа для избыточного давления пара над искривленной поверхностью жидкости. Эта формула имеет прямое отношение к мыльным пузырям. Гауссова же кривизна входит в формулу для дисперсионного соотношения волн на поверхности жидкости при учете поверхностного натяжения. Это соотношение объясняет тот факт, почему рябь на поверхности жидкости почти не движется, в то время как длинные волны бегут сравнительно быстро. Это можно легко заметить на поверхности любого открытого водоема - реки, озера, моря.

Но не только этим важна гауссова кривизна. Как доказал Гаусс, если просуммировать (взять интеграл) значения гауссовой кривизны во всех точках замкнутой (не имеющей края) поверхности и разделить полученную величину на  $4\pi$ , то получается всегда целое число:

$$\frac{1}{4\pi} \int_S K dS = \chi(S) \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

Это целое число называется эйлеровой характеристикой замкнутой поверхности. Об этой величине речь пойдет позже. Она является первым важным элементом нового раздела математики - топологии, возникшей на рубеже XIX и XX веков. Удивительным здесь является то, что все замкнутые поверхности можно отнести к одному из классов, для каждого из которых число  $\chi(S)$  будет иметь определенное значение. Например, для сферы  $\chi(S) = 2$ . Позже мы разберем вопрос о том, почему это число носит имя великого математика XVIII века Леонарда Эйлера и какое свойство



**Рис. 3.** Гауссова кривизна поверхности

поверхностей оно определяет. В дальнейшем мы поймем, что оно в более общем виде определяет и величину электрического заряда частиц. Для нас сейчас важно, что в обиход математики и физики XIX века был привнесен способ отличать поверхности по их кривизне. Поскольку, как установил Лобачевский и его поддержал Гаусс, геометрии могут быть разными кривыми даже у нашего физического пространства, то появился способ отличать разные кривые пространства по величине кривизны.

#### **2.4. Как измерить кривизну нашего пространства?**

Хотя идея Гаусса замечательна, но она содержит один недостаток. И этот недостаток в самой сути определения кривизны Гаусса, поскольку она является параметром внешней геометрии. Дело в том, что для вычисления ее экспериментальной величины необходимо уметь смотреть на наше пространство извне, т.е. из пространства большего числа измерений, наподобие того, как мы смотрим на поверхности в нашем пространстве. Как же быть? Ведь мы находимся в своем трехмерном пространстве и не можем увидеть себя со стороны! Мы можем лишь вычислять совокупность всевозможных расстояний от одних тел до других. Возникает вопрос - можно ли установить то, что наше пространство кривое только по этим данным, которые в совокупности и называются внутренней геометрией пространства?

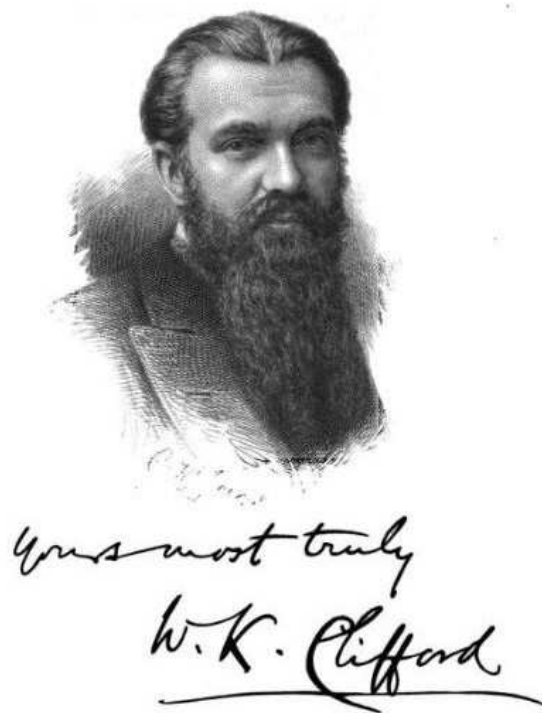
Полный ответ на это вопрос был найден в конце XIX века и наиболее важный вклад в создание такой теории сделал выдающийся немецкий математик Георг Фридрих Бернхард Риман. Его именем называют теперь совокупность геометрий, которые могут быть описаны с помощью внутренних расстояний в пространстве при условии, что в малой окрестности каждой точки такого пространства оно почти не отличается от плоского (прямого или евклидова). Это так называемые римановы геометрии. Риман ввел понятие внутренней кривизны пространства, что дало возможность впоследствии использовать такой подход в приложении к физическим задачам, не пытаясь угадать - находится ли наше физическое пространство внутри другого пространства большего числа измерений. Введение кривизны Римана стало важным шагом на пути создания Общей теории относительности (ОТО), но лишило



теорию простого и наглядного представления о том, что же происходит в кривом мире, если его свойства меняются со временем. Формула для кривизны Римана выглядит намного сложнее, чем формула для кривизны Гаусса. Поэтому мы здесь ее не приводим.



**Рис. 4.** Георг Фридрих Бернхард Риман 1826-1866



**Рис. 5.** Уильям Клиффорд Кингдом 1845-1879

В XIX веке понимали, что метод Римана приводит к очень сложным уравнениям, если мы хотим избавиться от необоснованных, с точки зрения эксперимента, размышлений о дополнительных измерениях. Поэтому многие ученые придерживались точки зрения, что кривизну пространства полезнее рассматривать именно с точки зрения внешней геометрии. Наиболее точное выражение такой точки зрения высказал еще один выдающийся математик XIX века - Уильям Клиффорд. Его точка зрения была изложена на одном из конгрессов математиков в конце XIX века следующими словами:

“Я считаю: 1. Что малые участки пространства действительно аналогичны небольшим холмам на поверхности, которая в среднем является плоской, а именно: там несправедливы обычные законы геометрии.

2. Что это свойство искривленности или деформации непрерывно переходит с одного участка пространства на другой наподобие волны.

3. Что такое изменение кривизны пространства и есть то, что реально происходит в явлении, которое мы называем движением материи, будь она весома или эфирная .

4. Что в физическом мире не происходит ничего, кроме таких изменений, подчиняющихся (возможно) закону непрерывности. ”

(Цитируется по книге: Альберт Эйнштейн и теория Гравитации. М.: Изд. Мир,



1979 г.)

Эти слова стали для многих ученых путеводной звездой в построении теории материи как проявления свойств самого пространства. В том числе, так себе представлял взаимоотношения пространства и материи Альберт Эйнштейн. Однако он не сумел воплотить в жизнь подход, который озвучил Клиффорд. И причиной этому является то, что ни тогда ни даже сейчас у нас нет пока прямых доказательств, что физическое пространство является лишь малой частью невообразимо огромного другого пространства, которое фантасты часто называют гипер-пространством, некоторые физики (Блохинцев) - Метапространством (видимо, по аналогии с понятием Метагалактики), а математики называют объемлющим пространством или пространством, в которое вложено наше физическое пространство (наподобие поверхности), имеющее размерность 3.

### **3. Материя, пространство и гравитация**

#### **3.1. Где пусто, и где густо?**

Идеи Клиффорда о том, “что в физическом мире не происходит ничего, кроме волнообразных перемещений искривленности пространства от точки к точке”, очень просты по сути, но требуют множества уточнений для того, чтобы связать их с тем, как мы видим и изучаем наш физический мир. Давайте проанализируем смысл высказываний Клиффорда и сопоставим их с тем, что мы уже знаем о мире.

Во-первых, Клиффорд утверждает, что по сути нет никаких различий между теми областями пространства, где находится материя, или там, где мы видим пустоту. Все это одна сущность, которую можно назвать пространством. С другой стороны, между областями с материей и с пустотой имеется существенная разница. Например, плотная материя, такая, как твердое тело, может абсолютно не пропускать свет, в то время как пустое пространство свет пропускает беспрепятственно. Область пустого пространства без материи (видимой) не притягивает материальные тела за счет силы тяготения, а области с материей притягивают. Можно назвать еще множество других отличительных признаков таких областей. Чем же могут определяться такие различия?

С точки зрения Клиффорда, поскольку обе области есть одна и та же сущность - физическое пространство, их различия могут быть описаны только в рамках свойств самого физического пространства. Но чем же определяются свойства самого физического пространства? Кажется, что ответ совершенно очевиден - свойства пространства определяются его геометрией, т.е. совокупностью всех расстояний между точками этого пространства. Однако мы забываем об еще одной сущности, которую пришлось вводить физикам в XIX веке - поле! Поле - это некоторая материальная сущность, не совпадающая по сути с самим пространством, но имеющая свой отличительный количественный признак в каждой его точке. В отличие от материи непосредственно поле мы не можем “видеть” где-то в отдалении. Например, материя светится или наоборот поглощает свет, а поле само по себе не “светится” без присутствия материи. Поэтому о поле мы можем судить лишь по тому, как это поле воздействует на материю в точке ее нахождения. Следовательно, поле очень похоже на само физическое пространство. Иногда даже дают такое определе-

ние: “поле - это состояние пространства”.

На самом деле, между этими двумя понятиями есть существенная разница. Принципиальным здесь является следующий момент. Если мы прибегаем к понятию поля, то пространство само по себе может быть евклидовым - “прямым, плоским”, а все различия, которыми обладают его области, заполненные материей, и без нее, должны объясняться свойствами этого поля. Это более привычный для физиков подход и более простой по существу. Действительно, ведь все расстояния в евклидовом пространстве измеряются по обычным прямым. Кроме того, поля обладают с математической точки зрения гораздо большим многообразием свойств, чем тот набор свойств, который представляет геометрия, даже риманова. Поэтому полевой подход был бы более предпочтителен для физиков с точки зрения “экономии мышления”. Однако есть несколько важнейших отличий между геометрическим и полевым подходами, которые можно проверить в эксперименте. Мы сейчас не будем приводить аргументы в пользу именно геометрического подхода. Это будет сделано в дальнейшем. Но сосредоточимся именно на нем. Тем более, что именно такой подход был избран Эйнштейном для построения Общей теории относительности.

В геометрическом подходе все свойства пространства определяются его геометрией. Отсюда сразу следует, что физическое пространство не может быть евклидовым (“прямым” или плоским). Как мы уже знаем у евклидова пространства все свойства везде одинаковы. Следовательно, с точки зрения Клиффорда пространство должно быть кривым. Наиболее простыми кривыми пространствами являются римановы пространства. основное их отличие от евклидова пространства - их кривизна, которая может меняться от точки к точке и даже переходить от точки к точке наподобие волны. Следовательно, мы можем считать, что отличие между областями, где находится материя и там где ее нет, определяется величиной кривизны пространства. Там, где материи больше - кривизна пространства больше, а в пустом пространстве, где лучи света движутся по прямым линиям, пространство практически не отличается от евклидова. Однако возникает вопрос, а какие количественные характеристики материи и, возможно, ее движения определяют величину кривизны пространства? Первый ответ на этот вопрос был дан Альбертом Эйнштейном в рамках Общей теории относительности.

### **3.2. Чем определяется кривизна пространства?**

Альберт Эйнштейн создал при участии других ученых (Лоренц, Пуанкаре, Минковский и др.) в начале XX века новую теорию, которую стали называть Специальной теорией относительности (СТО). Эта теория провозгласила - скорость света максимальна и недостижима для всех материальных тел. С этой скоростью распространяются только электромагнитные волны, причем величина этой скорости распространения в пустом пространстве не зависит от того, с какой постоянной скоростью движется наблюдатель. Следствием этого постулата является то, что при необходимости сравнивать показания приборов в разных системах отсчета, например, на Земле и в космическом корабле, если он движется со скоростью, близкой к скорости света, смешиваются измерения длины и времени. Представим себе космический корабль, летящий к другим звездам со скоростью, близкой к скорости света. Центру управления полетами (ЦУП) необходимо договориться с космонавтами о том,

когда в следующий раз выходить на связь. Как это часто бывает в фантастических рассказах и романах, космонавты основную часть полета проводят во сне. Поэтому ЦУП предполагает, что космонавты должны проснуться в тот момент, когда корабль достигнет определенной звезды - цели полета. Космонавтам и ЦУПу необходимо рассчитать и согласовать моменты времени, когда будет включен будильник на борту космического корабля при заданном расстоянии от звезды. Пусть  $x$  - расстояние до корабля от Земли, а  $t$  - время полета космического корабля по часам в ЦУПе. Согласно СТО моменты времени включения будильника по часам на борту корабля и расстояние, на котором окажется корабль в этот момент от Земли по данным самих космонавтов будут вычисляться с помощью преобразований, которые придумал еще в XIX веке Лоренц. Они имеют вид:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Наиболее важным здесь является то, что момент времени  $t'$ , когда на борту корабля сигнал будильника включится, зависит не только от момента времени  $t$  в ЦУПе, но и от того, на каком расстоянии  $x$  от ЦУПа находится корабль.

Такое положение дел заставляет думать, что измерение длин всегда взаимосвязано со временем, а измерение времени с расстояниями. Их невозможно отделить. Можно сказать, что пространство и время образуют общую сущность - пространство-время. Это пространство-время в СТО "прямое", но устроено иначе, чем обычное пространство расстояний в мире, окружающем нас. Для него было придумано название - псевдо-евклидово пространство четырех измерений (3 пространственные координаты и время) или пространство Минковского. Такое объединение выглядит очень непривычно. Действительно, мы всегда можем отличить в обычной жизни прибор для измерения времени - часы, от прибора для измерения времени - линейки. И как бы мы быстро не двигались, часы у нас на руке не превращаются в линейку, а линейка в часы. Этот парадокс не единственный в СТО. Есть парадокс близнецов, есть другие парадоксальные соотношения. Для ознакомления с рядом трудностей СТО (и ОТО) можно познакомиться, читая книгу "Новый взгляд на теорию относительности" Л. Бриллюэна, о которой уже говорилось в данных заметках. Все это наводит на мысль, что, хотя СТО во многом права, но она должна будет заменена на другую теорию. Пока нет прямых указаний, как это сделать, но многим, например, кажется, что скорость света не предел. В дальнейшем мы обсудим такую возможность.

Однако СТО с самого начала содержала некоторые проблемы, которые необходимо было решать сразу, не откладывая на потом. Решение этих задач и привело Эйнштейна к созданию ОТО. Дело в том, что СТО дает исчерпывающее описание только того, как меняется облик физических процессов, если смотреть на них из разных инерциальных систем отсчета. Но в реальности наблюдатель может двигаться ускоренно, может вращаться, а может двигаться по очень замысловатому закону. В классической механике особых проблем при выводе уравнений движения в неинерциальных системах нет. В этих системах, в отличие от инерциальных, приходится вводить некоторые дополнительные силы, которые называются силами инерции. Человек реально испытывает эти силы. Такие силы вжимают пилота современного истребителя в кресло при сложных маневрах. Эти силы заставляют Вас цепляться

за поручни в трамваях и автобусах, когда они тормозят или резко увеличивают скорость. Но в СТО дело обстоит несколько иначе, чем в классической механике.

Рассмотрим в качестве примера то, как выглядят законы СТО в равномерно вращающейся системе отсчета. Во вращающейся системе отсчета точки, находящиеся на различных расстояниях от центра вращения, движутся с различными скоростями. Если система вращается со скоростью  $\Omega$ , то на расстоянии  $r$  от центра вращения линейная скорость точек, которые неподвижны с точки зрения невращающегося наблюдателя, будет равна  $V(r) = \Omega r$ . Но в этом случае, как записать преобразования Лоренца? Ведь получается, что на различных расстояниях  $r$  от центра вращения координаты будут меняться по-разному! Это означает, что часы будут идти с различной скоростью на различных расстояниях от центра, а стандартные линейки будут иметь различную длину. Но такая ситуация как раз характерна для пространств Римана, имеющих кривизну! В римановых пространствах стандартные линейки (эталонны длины) имеют различную длину в разных точках пространства, предписываемую законами данной геометрии. Но это замечательно!

Мы впервые столкнулись с ситуацией, когда сами физические законы требуют введения пространства с различными геометрическими свойствами в разных его точках. И именно этот факт в конце концов и привел к созданию ОТО. Вращающаяся система отсчета - это одна из самых простых неинерциальных систем. А что будет, если наблюдатель движется по очень сложному закону? На эти вопросы и должна была отвечать ОТО.

Однако с самого начала при решении проблем движения в неинерциальных системах отсчета Эйнштейну было необходимо разобраться с одной странной ситуацией. Проблема состоит в следующем. Пусть некий наблюдатель свободно падает в гравитационном поле, например, движется в корабле по орбите вокруг Земли. Как известно, на борту такого космического корабля наблюдается невесомость, т.е. отсутствие каких-либо сил инерции, которые являются привычным физическим признаком инерциальной системы отсчета. Однако траектория движения такого корабля является эллипсом или окружностью, а это является основным геометрическим признаком неинерциальной системы отсчета. Ведь согласно первому закону Ньютона, если на тело не действуют какие-либо силы, то тело движется равномерно и прямолинейно! Получается, что мы имеем ситуацию, когда на тело не действуют силы, но тело движется по криволинейной траектории. Это означает, что с физической точки зрения система, связанная со свободно падающим телом - инерциальная, а с геометрической - неинерциальная. Это наблюдение позволило Эйнштейну предположить, что Первый закон Ньютона следует обобщить.

### **3.3. *Общая теория относительности или как материя искривляет пространство***

Обобщение первого закона Ньютона должно учитывать тот факт, что траектории свободно падающих тел могут быть очень разнообразными. Эти траектории, согласно теории тяготения Ньютона, определяются тем, как в пространстве распределена масса вещества. Но такие траектории в классической механике определяются уже вторым законом Ньютона:

$$ma = F.$$



(Для точности заметим, что последняя формула является следствием второго закона Ньютона, а не самим законом Ньютона). Поэтому получается, что теперь мы не можем вообще разделить первый и второй закон Ньютона. Они должны теперь формулироваться вместе.

Есть еще одна важная проблема. Можно поставить вопрос, а почему собственно при свободном падении тела в поле тяготения в собственной системе отсчета никаких сил мы не ощущаем? Ответ на этот вопрос очень прост - потому, что в законе Всемирного тяготения и во втором законе Ньютона масса тел одна и та же! Эти два закона относятся к описанию совершенно разных явлений и имеют разную сущность, но по каким-то причинам числовое значение масс в этих законах одно и то же. В том, что в эти формулы могут входить массы, хоть немного отличающиеся по величине задумался еще сам Ньютон, но проверку этого факта удалось провести с достаточной точностью лишь в конце XIX века.

Такую проверку осуществил Л.Этвеш с учениками. В историю физики эти работы вошли под названием эксперимент Этвеша. Познакомиться с этим экспериментом подробнее можно по статье известного физика-теоретика Дикке, опубликованной на русском языке в УФН в 1963 году (ссылка: [http://ufn.ru/ufn63/ufn63\\_2/Russian/r632f.pdf](http://ufn.ru/ufn63/ufn63_2/Russian/r632f.pdf)). Этот эксперимент проводится и в настоящее время со все возрастающей точностью. Результат этих экспериментов неизменно таков - с доступной нам точностью масса, входящая во второй закон Ньютона (инертная масса), и масса, входящая в закон тяготения Ньютона (гравитационная масса), равны. С точки же зрения нашей проблемы этот результат можно интерпретировать так. В свободно падающей в гравитационном поле системе отсчета, движущейся ускоренно и по кривой траектории по отношению к удаленным звездам, возникает сила инерции, которая из-за равенства инертной и гравитационной масс в точности равна силе тяготения, но направлена строго в противоположном направлении. Поэтому эти две силы точно компенсируют друг друга, и в такой системе отсчета наблюдатель не ощущает никаких сил.

Этот экспериментальный факт очень важен и Эйнштейн включил его в качестве одного из постулатов в создаваемую им теорию. В современной ОТО этот постулат носит название принцип эквивалентности масс. Роль этого принципа в ОТО такова - если когда-нибудь удастся обнаружить отличие между инертной и гравитационной массами, то Общую теорию относительности придется менять. Она справедлива в нынешнем виде только до тех пор пока эти массы равны. Установив важный принцип, мы можем развивать теорию дальше. Цепочка наших рассуждений теперь такова. Свободно падающие в гравитационном поле тела движутся по кривым траекториям, но сами тела не испытывают никакого воздействия. Поэтому можно предположить, что кривизна траектории объясняется в этом случае не каким-то внешним воздействием, а самим искривлением пространства. Если пространство неевклидово, то в нем и нет прямых в обычном смысле.

Но чем определяется кривизна траекторий согласно Всемирному закону тяготения? - Распределением массы вещества в пространстве. Это означает, что масса прямым образом искривляет пространство. Действительно, если тело, имеет по величине скорость большую второй космической скорости для звезды или планеты, то оно будет свободно падая в поле тяготения этого тела, неограниченно удаляться



от него. При этом оно будет двигаться по траектории, которая со временем становится близкой к прямой. Это означает, что кривизна исчезает при удалении от массивных тел и увеличивается при приближении. Таким образом, мы установили, что между массой и кривизной пространства есть прямая связь. Но нам нужна точная формула. Причем надо решить вопрос о какой кривизне идет речь. О внутренней кривизне Римана или внешней кривизне Гаусса? Выбор был сделан Эйнштейном на основе соображений, которые мы уже обсуждали. У нас нет возможности увидеть наше пространство со стороны. Поэтому естественно предположить, что наблюдаемой кривизной является внутренняя. Но как связана масса и кривизна? Эта проблема оказалась очень сложной. Прямых измерений кривизны пространства мы до сих пор получить не можем и довольствуемся предсказаниями теории о движении тел и сравнением этих предсказаний с экспериментом. Поэтому Эйнштейну предстояло угадать вид уравнений новой теории, исходя из того, что дает классическая физика и из каких-то очень общих, почти философских соображений. Классическая физика указывает на закон Всемирного тяготения, поэтому этот закон должен выполняться и в новой теории при определенных упрощающих условиях. Все остальное очень туманно. Несколько подсказок Эйнштейн нашел в математике и СТО, которую он построил раньше. Математика начала XIX века представила стараниями Гильберта и Шмидта важный способ вычислять структуру римановых пространств, которые в “среднем” обладают наименьшей кривизной. Но в классической механике есть аналогичный принцип. Он говорит, что все тела движутся таким образом, что среднее значение разности кинетической и потенциальной энергии тел оказывается всегда минимальным. Этот принцип называется принципом наименьшего действия. Если предположить, что кривизна связана с энергией тел, то тогда вычисления Гильберта и Шмидта указывают на то, что реальное физическое пространство в присутствии материи искривляется в каком-то смысле минимальным образом. Однако мы уже установили, что кривизна пространства согласно закону Всемирного тяготения должна быть связана не с энергией, а с массой тел. Тут на помощь как раз и приходит СТО. В Специальной теории относительности Эйнштейном была получена замечательная формула:

$$E = mc^2.$$

Из этой формулы следует, что масса и энергия представляют собой одну и ту же сущность. А раз так, то у нас нет проблем для отождествления массы и энергии в новой теории. Да будет так! Математика еще раз пришла на помощь в вопросе получения нужных уравнений. Оказалось, что если вычислять минимальную среднюю разность обобщенных кинетической и потенциальной энергий материи в совокупности с минимальной средней кривизной пространства, таким же способом, как это было сделано Гильбертом и Шмидтом, то получаются очень красивые, но и очень сложные уравнения. Эти уравнения были получены Эйнштейном и носят его имя. Мы их выписывать не будем, а лишь поговорим об общих следствиях из этих уравнений.

После вывода этих уравнений оказалось, что из них очень легко можно получить закон Всемирного тяготения в предположении, что материя не очень сильно искривляет пространство. Для этого оказалось достаточно подобрать одну константу в уравнениях Эйнштейна так, чтобы в законе Всемирного тяготения, который по-

лучается из уравнений Эйнштейна, стояла постоянная тяготения Ньютона. Однако, при этом пришлось пожертвовать важным принципом, который был провозглашен Клиффордом - “В мире нет ничего, кроме кривизны”.

При выводе уравнений Всемирного тяготения Ньютона из уравнений Эйнштейна невозможно просто отождествить материю и кривизну пространства. Они в ОТО существуют независимо. Для того, чтобы описать движение материи по рецептам Эйнштейна, необходимо указать вид материи и ее характеристики, после этого вычислить энергию и другие характеристики ее движения, а уж после этого определить то, как будет меняться кривизна пространства. Вместе с тем построенная теория оказалась способной предсказывать эффекты, которые можно было проверить на практике, чем и занялись ученые в начале XX века и занимаются до сих пор. ОТО предсказала существование новых удивительных объектов среди тех, которые мы можем наблюдать на небе.

Были предсказаны “черные дыры” и “кротовые норы”. Теория предсказала, что Вселенная, равномерно заполненная обычным веществом, должна расширяться одинаково во все стороны, а в прошлом должна была представлять собой очень маленький, очень плотный и горячий объект. Этот вывод получил название теории Большого взрыва. Первым такую теорию построил советский ученый Фридман. К настоящему времени предсказанное уравнениями Эйнштейна расширение Вселенной открыто. Это сделал американский астроном Э.Хаббл в 20-х годах XX века.

Считается, что в Космосе обнаружены объекты очень похожие на “черные дыры”, которые ввел в ОТО Шварцшильд. “Кротовые норы” не открыты, но считается, что их существование вполне возможно. Был проведен целый ряд экспериментов по проверке ОТО в лабораториях. Эти эксперименты, если частью и не подтвердили ОТО абсолютно, но показали, что их результаты не противоречат ОТО. Но самое главное, ОТО стала основанием для создания новых теорий, связывающих кривизну пространства с материей. В том числе, предпринимались и предпринимаются попытки построить теорию, подобную ОТО, но в которой бы реализовывался принцип Клиффорда. Одной из таких теорий и является топологическая квантовая теория, к обоснованию которой мы теперь и перейдем.

#### **4. Ручка Уилера или “Заряд без заряда”**

##### **4.1. Электричество, магнетизм и электрические заряды.**

Рассматривая историю возникновения представлений о гравитации и о кривом пространстве, мы почти совсем не касались вопросов, связанных с другим важным взаимодействием материальных тел - электромагнитным. Хотя знания о существовании наэлектризованных тел появились, по всей видимости, раньше, чем о гравитации (гравитацию просто не замечали, считая ее естественным состоянием мира), но реальное ее описание появилось спустя больше ста лет после открытия Всемирного закона тяготения.

Сначала был открыт закон Кулона, который во многом повторял закон Всемирного тяготения Ньютона. Этот закон так же указывал, что сила взаимодействия между наэлектризованными телами обратно пропорциональна квадрату расстояния между наэлектризованными телами. Однако, в отличие от закона Всемирного тяготения

ния, в котором взаимодействуют массы тел, в законе Кулона взаимодействуют заряды. Заряд характеризует способность наэлектризованного тела притягивать, и что более важно, отталкивать другие наэлектризованные тела. В законе тяготения массы всегда притягиваются, а в законе Кулона - могут как притягиваться, так и отталкиваться. Оказалось, что заряды могут быть двух знаков - положительный и отрицательный. Причем одноименные заряды отталкиваются, а противоположного знака притягиваются.

Это дополнительное свойство зарядов по сравнению с массами изменяет облик электрических взаимодействий по сравнению с тяготением. Например, гравитационное поле нельзя экранировать (по крайней мере сейчас), а электрическое можно. У электромагнитного поля есть еще одна важная особенность. Оно значительно интенсивнее поля тяготения. Поэтому поле тяготения проявляется на астрономических масштабах, а электромагнитное - в привычном для нас мире. Например, именно благодаря электричеству мы наблюдаем во время грозы молнии. Однако электричество обеспечивает нас не только такими красивыми, эффектными, а иногда и грозными явлениями как молнии, оно обеспечивает наш мир возможностью существования вещества, что в конце концов позволяет существовать таким сложным объектам как животные и человек. Правда, при этом законы электричества должны сочетаться с квантовыми законами.

Вторая ипостась электромагнитного взаимодействия - магнитное поле было открыто так же в древние времена. Китайские мореплаватели с древних времен использовали намагнитченные куски железа для того, чтобы определять направление на север. Это можно было сделать не по звездам или Солнцу, а по направлению, куда указывал намагнитченный кусок железа. Магнитное поле вместе с электрическим определяет такие эффектные явления в окружающем нас мире, как северные сияния. Но что более важно, магнитное поле защищает нас от заряженных частиц, приходящих из Космоса. Без земного магнитного щита жизнь навряд ли смогла появиться на Земле.

Оба явления - электричество и магнетизм - были объединены в общий тип физического взаимодействия в середине XIX века великим английским физиком Максвеллом. Теория Максвелла объяснила множество явлений, связанных с электричеством и магнетизмом, и позволила предсказывать такие явления. В совокупности с достижениями экспериментальной физики в области магнетизма и электричества, которые были сделаны многими учеными XIX века, такими как Фарадей, Герц, Эрстед и другие, теория Максвелла позволила внедрить электрические и магнитные технологии в нашу повседневную жизнь. Прочсть о напряженных и захватывающих поисках истины учеными различных столетий в описании явлений электромагнетизма можно в замечательной книге В.П.Карцева "Приключения великих уравнений". (Скачать можно отсюда <http://lib.rus.ec/b/297585pCЕёòàòüïæïíçåãñü>: <http://n-t.ru/ri/kr/pu.htm>)

Современная физика включает теорию Максвелла как фундаментальную основу наших представлений об окружающем нас мире. Дополненная квантовыми законами эта теория позволила понять как устроено вещество, как устроены атомы и частично, как устроены ядра атомов и элементарные частицы. Эта же теория позволила понять множество явлений в Космосе. Однако, хотя эта теория помогает по-

нять наш мир, но вместе с тем она содержит целый ряд загадок, которые не разгаданы и по сей день. Попытка разгадать часть этих загадок и послужила причиной к использованию необычных свойств кривых пространств в теории элементарных частиц, которые впервые ввел в обиход физики выдающийся американский физик Дж. Уилер.

#### **4.2. Сколько энергии необходимо, чтобы создать точечный заряд?**

Вопрос, который вынесен в заголовок данного раздела, возник в теории электричества не сразу после создания теории Максвеллом. Во-первых, Масквелл, создавая свою теорию, еще не подозревал о существовании такой частицы как электрон. Во-вторых, такой вопрос превратился в проблему только после попыток установить реальный размер электрона. И, в-третьих, этот вопрос тесно связан с вопросом: из чего складывается масса электрона? К этой же проблеме тесно примыкает проблема дискретности зарядов всех частиц. В чем же собственно проблема? Ответ на поставленный вопрос в классической теории Максвелла можно получить с помощью простой процедуры вычисления суммарной энергии всех элементов поля, созданного зарядом во всем пространстве.

Эти вычисления производятся с помощью математической процедуры “взятия” интеграла от плотности энергии поля. Результаты таких вычислений проверялись многократно для различных явлений и систем и давали отличное совпадение с экспериментом. Но все эти вычисления дают бессмысленный результат, если заряд частицы сосредоточен в точке. В этом случае энергия поля оказывается бесконечной. Однако, как все мы отлично понимаем, точек в природе не бывает. Точка - это математическая идеализация. Поэтому ясно, что точечных частиц не бывает и, значит, проблемы не должно быть. Просто надо поточнее измерить размер частицы, например, электрона, и после этого все станет на свои места. Например, классическая электродинамика Максвелла предсказывает, что электрон должен иметь размер (радиус), который вычисляется по формуле:

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2.8 \cdot 10^{-13} sm$$

Здесь  $e$  - заряд электрона,  $m_e$  - масса электрона,  $c$  - скорость света. Пока эксперименты не позволяли заглянуть на такие расстояния, вопрос о том, сколько же энергии необходимо, чтобы создать электрон, не очень беспокоил экспериментаторов. Ответ давался массой электрона и формулой Эйнштейна  $E = m_e c^2$ . Однако теоретиков он начал мучить задолго до того, как экспериментаторы столкнулись с проблемой реального определения размера электрона.

Как только появилась квантовая теория, то стало ясно, что с энергией электрона что-то не ладно. Квантовая теория постулирует, что частицы, ну по крайней мере, электроны - точки. Это означает, что расчеты энергии и массы электрона по классическим формулам не возможны. Но как тогда быть? Нужно откуда-то брать размер электрона. Квантовая теория утверждает, что все частицы - волны. Но у волны есть длина волны! Может быть, надо брать в качестве характеристики электрона именно этот размер? Однако у электронов, движущихся с различными скоростями, размер будет разным, что будет приводить к энергиям, очень сильно различающимся. Но



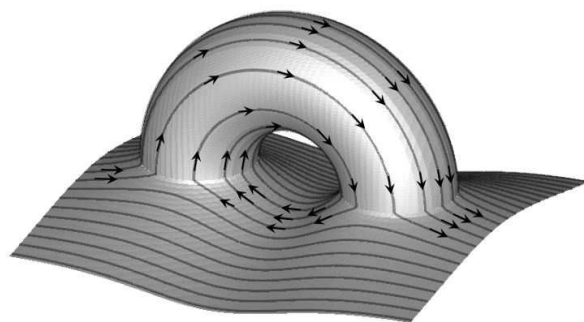


Рис. 6. Ручка Уилера

квантовая механика ничего больше предложить не может! А это означает, что энергия электрона не определена. В дальнейшем экспериментаторы пришли к неутешительному выводу, что они тоже не могут в эксперименте найти размер области, в которой сосредоточен заряд электрона. Электрон ведет себя как точка! И это означает, что проблемы с массой и энергией решить не удастся. Конечно, для создания электрона нужна небольшая масса. Но как ее вычислить?

Человек, изображенный на этой фотографии, - Джон Арчибальд Уилер, американский физик-теоретик (1911-2008). Совместно с другим известным американским физиком-теоретиком Ч. Мизнером Дж. Уилер предложил новую идеологию во взглядах на электрический заряд и новый подход к решению проблем, которые мы описали выше. Свою идею Уилер назвал "заряд без заряда". Сформулированная таким парадоксальным образом новая идея оперировала понятиями нового для физики, да и для самой математики, ее раздела - топологии. С появлением топологии в обиход математики попали такие объекты как "ручки".

**Ручка** - это пример поверхности с дыркой. Прообразом такой поверхности является обычная ручка, такая, как у гири, портфеля, чашки или чайника. Картинка, изображающая такую поверхность с ручкой, приведена на рисунке. Однако Уилеру нужна была ручка, которая была бы прикреплена не к поверхности, а к нашему 3-х мерному пространству. Такую ручку изобразить невозможно, как невозможно изобразить то, как выглядит наше пространство "со стороны". Однако, учитывая обстоятельство, что наши рассуждения относятся не к поверхности, а к трехмерному пространству, их можно продемонстрировать на рисунке, изображающем двумерную ручку. (Следует отметить, что еще до Уилера некоторыми физиками высказывалась идея о существовании в пространстве так называемых кротовых нор. Эти объекты появляются в Общей теории относительности как решения уравнений Эйнштейна для пространства, заполненного экзотической материей. Но кротовые норы - это не совсем то, что, имел ввиду Уилер.)

Чтобы понять идею Уилера, предположим, что пространство с ручкой заполнено электрическим полем таким образом, что силовые линии этого поля втекают в одну из гордовин ручки и вытекают из другой. Это изображено на рисунке в виде красных линий со стрелкой. Величина заряда в области может быть подсчитана как число силовых линий, которые пересекают поверхность объема с учетом знака, который определяется тем, входит (+) или выходит (-) силовая линия из объема. Если



внутри ручки нет электрических зарядов, то, как видно из рисунка, число силовых линий, входящих в одну горловину, будет в точности равно числу силовых линий, выходящих из второй горловины. Изюминкой такой конфигурации с ручкой является то обстоятельство, что для внешнего наблюдателя каждая из горловин будет восприниматься как область с зарядом, хотя в реальности никакого заряда там нет. Что видит наблюдатель? Он видит, что все силовые линии входят в какую-то область пространства, соответствующую одной горловине, и выходят из другой. Но раз линии входят в область, то это соответствует для него наличию в этой области заряда определенного знака. Другая горловина в этом случае для него является заряженным объектом другого знака. На лицо “заряд без заряда”.

Важным свойством таких зарядов “без заряда” является то, что их энергия всегда конечна. Остается предположить, что реальные частицы - это такого типа ручки и мы получаем образ частиц как областей искривленного определенным образом пространства. Очень привлекательная идея, если учесть, что в теории элементарных частиц существуют и другие заряды, например, барионный лептонный и т.д. Может быть такая идея позволит и их объяснить? Кроме этого, сразу бросается в глаза то, что идея Уилера - это воплощение идеи Клиффорда о геометрическом описании материи. Может, это и есть решение существа проблемы о представлении материи как проявлении геометрии мира. Уилер эту идею назвал “материя без материи”!

Однако при всей красоте и простоте эта идея Уилера содержит целый ряд недостатков, которые заставляют усомниться в ее реализуемости. Первая и самая очевидная проблема состоит в том, что все частицы должны быть связаны в пары с противоположными зарядами. С одной стороны, кажется, что это очень хорошо. Мы ведь знаем, что у каждой частицы есть античастица. Но по идее Уилера частица и античастица связаны ручкой. При очень большом числе частиц, которое имеется в нашем мире, число ручек будет невообразимо огромным. И поэтому сложность такого пространства становится просто чудовищной. Но этой сложности мы не наблюдаем.

Вторая проблема - это то, что величина заряда этих частиц может быть любой. Но в реальности мы наблюдаем частицы, у которых заряды строго кратны заряду электрона. Идея Уилера никак не объясняет этот факт. Уже этих двух проблем достаточно, чтобы понять, что идею Уилера необходимо модифицировать. Надо оставить ее сильные стороны - они связаны с топологией пространства, и удалить недостатки - они связаны с трактовкой заряда. Анализируя идею Уилера, можно понять, что в ней физическое содержание электрического заряда, а также электрического и магнитного полей, вообще никак не затрагивается. Они существуют сами по себе вне зависимости от строения пространства. Однако именно структура пространства в форме топологической ручки по идее Уилера и призвана “объяснить” физический смысл этих понятий. Таким образом, задача модификации идеи Уилера должна состоять именно в органичном соединении понятий топологии и понятий электромагнитной теории. Только после этого мы сможем, пользуясь такой красивой во всех отношениях идеей, ответить на вопрос - как создать электрон и сколько для этого потребуется энергии?

## Лекция 2

# Топология, геометрия, заряд и масса

### 1. Топология и электрический заряд

“.... профессор Уилер сказал:  
“Фейнман! Я знаю, почему у всех электронов  
одинаковый заряд и одинаковая масса”.  
— “Почему же?” —  
“Потому что всё это один и тот же электрон”.

Р.Фейнман, Нобелевская лекция

В работах [1, 2, 3, 4] была предложена, а в работах [21, 22, 23, 24, 24] была развита концепция “классического” тополого-геометрического описания элементарных частиц и полей, включая электромагнитное и гравитационное поля. Термин “классические” относится здесь к тому, что изначально описание всех полей строится на основе абсолютного пространства, не зависящего от времени, но размерности на единицу большего, чем трёхмерное пространство классической механики. Это означает, что релятивистские эффекты при больших скоростях движения частиц материи в данной теории должны появиться не с помощью постулата конечности скорости света СТО, которое вводится “руками”, а в результате выяснения свойств частиц, которые появляются в данной концепции. То, что такая возможность появляется в рамках данного подхода, следует из того, что в её рамках [4] из простых геометрических и топологических представлений выводятся уравнения электродинамики с точечными целочисленными зарядами, движение которых описывается уравнениями Шредингера и в среднем уравнениями Ньютона. В настоящей работе решается ряд проблем, которые не были решены в рамках предыдущих работ по построению данной теории.

Предлагаемая концепция строится на новой топологической интерпретации электрического заряда в форме топологического инварианта пространства - эйлеровой характеристике выделенных геометрическим способом областей трёхмерного пространства. Развитие этой концепции в [4] позволило установить связь между построенным в её рамках описанием электромагнитных полей с квантовой теорией частиц. Последнее создало базу для обоснования предложенной в [1, 2] топологической классификации элементарных частиц, как областей пространства с геометрическим способом выделенными границами.

Идея объяснения дискретности электрического заряда с помощью его интерпретации, как некоторой топологической характеристики пространства, впервые была высказана Дж.Уилером [5, 6, 7]. Эта идея кажется сейчас вполне естественной, поскольку целочисленная величина, которая является инвариантной в физическом смысле и независимой от расположения и движения всех типов материи, должна быть инвариантом очень высокого уровня, т.е. именно топологическим инвариантом. Единственное, что необходимо выяснить при реализации такой идеи - это то, какой топологический инвариант должен быть сопоставлен электрическому заряду.

ду? Во-первых, заряд может быть топологическим инвариантом конфигурации полевых структур, заданных на пространстве, или может быть топологическим инвариантом самого пространства или, возможно, пространства-времени. Дж. Уилер полагал, опираясь на идеи Общей теории относительности (ОТО), что заряд должен быть топологическим инвариантом пространства или пространства-времени. Однако в квантовой теории поля (КТП) для описания дискретных характеристик зарядовых чисел пытались использовать топологические инварианты полевых структур - топологические заряды [8, 12, 10]. Различие в выборе между этими двумя возможностями в разных теориях, очевидно, связано с трудностями объединения ОТО с КТП, но с точки зрения математики может и не иметь принципиального значения, поскольку топологические свойства полей наследуют топологические свойства самого пространства, на котором они заданы. В такой ситуации приходится опираться на какие-то фундаментальные представления о пространстве и пространстве-времени. Поскольку само понятие физического поля в форме гравитационного и электромагнитного основано на представлении о некотором состоянии окружающего нас “пустого” пространства, то более естественным и фундаментальным является подход, основанный на геометризации этих полей. Эта идея восходит к идеям Клиффорда [9] и предполагалась к реализации в ОТО, но не была воспроизведена в ней в полном объёме.

В [1, 2, 3, 4] было показано, что сочетание упрощённого по сравнению с ОТО геометрического подхода с использованием идеи о топологическом происхождении электрического заряда, а в последствии и барионного, позволяет из простых соображений построить электродинамику с целочисленным зарядом и квантовую теорию частиц [4]. Такой подход, хотя и не содержит полного решения всех проблем, связанных с современными представлениями и экспериментальными фактами теории элементарных частиц, тем не менее даёт основание надеяться получить достаточно полную их теорию. Упомянутое упрощение геометрического подхода по сравнению с ОТО состоит в том, что геометрическая часть концепции строится на предположении, что физическое трёхмерное риманово пространство может быть вложено в пространство четырёх измерений, что позволяет всю его геометрию описывать только одной функцией высоты, вместо метрического тензора псевдоевклидова пространства-времени, содержащего 10 независимых компонент.

## **2. Электрический заряд и геометрия пространства**

Следуя работе [4], вначале рассмотрим некоторые основные элементы геометрии и топологии пространства, важные для описания физических полей. Будем пока полагать, что движения рассматриваемых объектов происходят с такими скоростями, что можно пренебречь релятивистскими эффектами. Поэтому время  $t$  является абсолютным. Необходимость введения релятивистской инвариантности будет обсуждаться по ходу изложения. Как и в [4] будем предполагать, что на малых расстояниях вблизи точечного заряда пространство имеет некоторую кривизну и является неевклидовым. Вместе с тем, локальное увеличение кривизны пространства на малых масштабах воспринимается нами, как увеличение плотности энергии материи вблизи этой точки, в то время, как наши представления о метрических свойствах самого пространства остаются связанными с “фоновым”, окружающим нас, евкли-

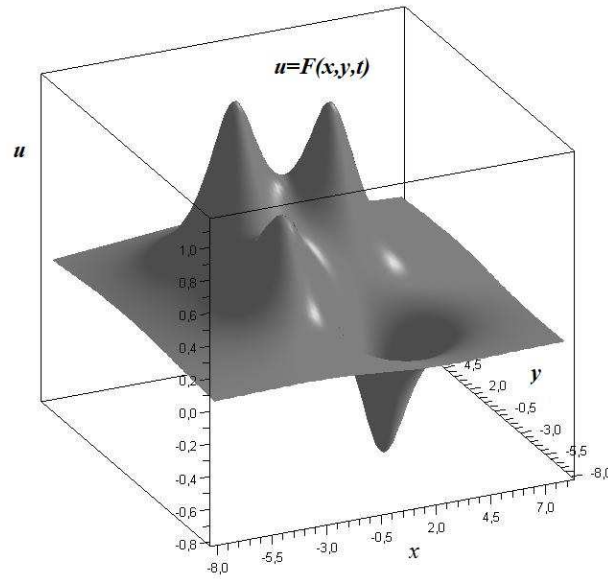
довым пространством  $P^3$  размерности  $d = 3$ . В результате у нас возникает представление о характере пространственных изменений физических величин вблизи точечного заряда, соответствующее фоновому пространству, а не реальному - физическому. Для наглядности мы можем обратиться к представлению такой ситуации с помощью терминов внешней геометрии. Положим, что наше физическое пространство  $V^3$  представляет собой гиперповерхность трёх измерений в объемлющем евклидовом пространстве  $W^4$ , имеющем размерность  $d = 4$ . Такая гиперповерхность может быть задана с помощью функции высоты  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$ , т.е. с помощью алгебраического уравнения:

$$u = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

где  $u$  - дополнительная четвертая координата в объемлющем пространстве  $W^4 = T_u \times P^3$ , а  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  - декартовы координаты в ортогональной к направлению  $u$  гиперплоскости  $P^3$  в объемлющем пространстве. Пример двумерной гиперповерхности приведен на рис. (7). Эта гиперплоскость  $P^3$  рассматривается как фоновое евклидово пространство и должна быть связана с системой отсчёта. Геометрия гиперповерхности  $V^3$  полностью определяется функцией высоты  $\mathcal{F}$ . Сама функция  $\mathcal{F}$  определяется выбором системы координат в объемлющем евклидовом пространстве  $W^4$ . Поскольку гиперплоскость  $P^3$  отождествляется с системой отсчёта, то при заданной системе отсчёта функция  $\mathcal{F}$  определена однозначно. Мы не будем пока обсуждать вопрос о том, как меняется функция  $\mathcal{F}$  при переходе от одной системы отсчёта к другой и физический смысл таких преобразований. Хотя этот вопрос является существенным, тем не менее его можно отложить до тех пор, пока не будут сформулированы все основные принципы описания материальных объектов и полей в рамках данной концепции.

Будем предполагать, что физическая гиперповерхность является гладкой, а ее функция высоты  $\mathcal{F}$  является функцией Морса, т.е. эта функция имеет только изолированные критические точки (т.е. экстремумы и седловые точки). Для описания конструкции частиц и полей, связанных с этой гиперповерхностью, введем несколько определений.

**Определение 1** Пусть  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$  - функция Морса, заданная на трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbf{R}^3$ . Будем называть **топологической ячейкой**, связанной с функцией  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ , открытую область пространства, ограниченную какой-либо изоповерхностью функции  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ . Топологическую ячейку будем называть **простой**, если топологическая ячейка является компактной и содержит единственную критическую точку - экстремум, лежащий строго внутри топологической ячейки. Простой **предельной** топологической ячейкой будем называть простую топологическую ячейку, если её границей является особая изоповерхность функции  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ , т.е. изоповерхность, на которой лежит хотя бы одна седловая точка  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ . **Пустой** топологической ячейкой будем называть топологическую ячейку, в которой нет ни одной критической точки функции  $\mathcal{F}$ . В топологии простые топологические ячейки называют клетками [15], но в данной работе мы будем использовать введенный здесь термин - простые топологические ячейки. Важным является то, что согласно общей теории Морса [15, 14], любая область, ограниченная изоповерхностью функции Морса, может быть представлена объединением простых и пустых топологических ячеек, границами которых являются особые изоповерхности. По определению **особой из-**



**Рис. 7.** Двумерный аналог гиперповерхности, заданной с помощью функции высоты  $u = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$

**поверхностью** функции Морса называется изоповерхность, на которой лежит хотя бы одна седловая точка.

Рассмотрим на физической гиперповерхности  $V^3$  внутри одной простой топологической ячейки  $\mathcal{V}$  криволинейную систему координат  $\mathbf{e} = (e^1, e^2, e^3)$ , которая связана с функцией высоты  $\mathcal{F}$  с помощью уравнений:

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial e^a} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\beta} = \varepsilon e^a, \quad a = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}. \quad (2)$$

Функции:

$$e^a = e^a(\mathbf{x}, t)$$

описывают отображение  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$  гиперплоскости  $P^3$  в  $V^3$  внутри топологической ячейки  $\mathcal{V}$ . Величина  $\varepsilon = \pm 1$  в (2) зависит от того, достигает ли  $\mathcal{F}$  максимума ( $\varepsilon = -1$ ) или минимума ( $\varepsilon = +1$ ) внутри простой ячейки в точке  $P_0(\mathbf{x}_0, t)$  с координатами  $\mathbf{x}_0$ , являющейся образом начала координат  $e^a$ , т.е. точки, в которой  $e^a(\mathbf{x}_0, t) = 0$ . Это означает:

$$\varepsilon = \text{sign det} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \Big|_{P_0}. \quad (3)$$

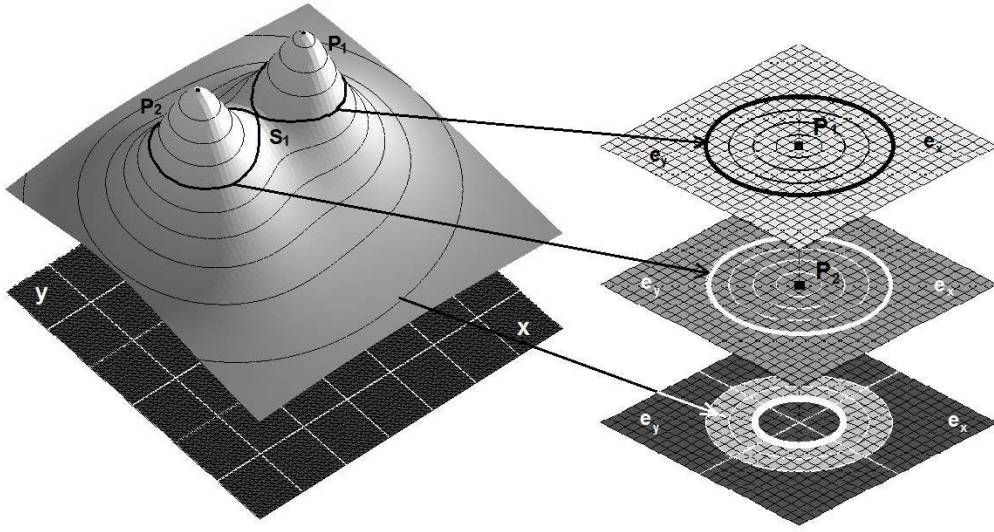
Следствием (2) является соотношение:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\beta} = \varepsilon \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} e^a = \varepsilon \frac{\partial |\mathbf{e}|^2}{\partial x^\beta}.$$

Отсюда находим, что в окрестности точки  $P_0$ , точнее в простой топологической ячейке  $V$ , функция  $\mathcal{F}$  имеет следующий вид:

$$\mathcal{F} = \varepsilon |\mathbf{e}(\mathbf{x})|^2 / 2 + \mathcal{F}_0, \quad (4)$$





**Рис. 8.** Двумерный аналог функции  $\mathcal{F}$  с седловой точкой  $S_1$ .  $P_1$  и  $P_2$  - экстремумы, лежащие внутри клеток, ограниченных особой изоповерхностью. Особая изоповерхность выделена жирной линией.

где  $\mathcal{F}_0$  - значение функции  $\mathcal{F}$  в точке  $P_0$ :  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\mathbf{x}_0)$ , где она достигает локального экстремума: минимума или максимума, в зависимости от знака  $\varepsilon$ , что и отражает соотношение (3). Пусть  $\mathcal{F}_s$  - значение функции  $\mathcal{F}$  на границе простой топологической ячейки, а  $\mathcal{F}_0$  - значение этой функции в экстремуме, лежащем внутри этой ячейки. Тогда каждая изоповерхность функции  $\mathcal{F}$ , соответствующая некоторому значению этой функции  $\mathcal{F}_1 \in [\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_0]$ , отображается в двумерную сферу радиуса:

$$R = \sqrt{2|\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0|} \quad (5)$$

на декартовой карте системы координат  $e^a$  (см. рис. (8)). Поскольку соотношение (5) может быть однозначным только на каждой простой топологической ячейке, то в целом отображение  $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{x}$ , включающее координатные карты  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$  на всех простых топологических ячейках, является многолистным. Каждый лист отображения соответствует одной и только одной простой или пустой топологической ячейке. Иллюстрация геометрического смысла отображения  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$  представлена на рис. (8).

Как показано в [4], физический смысл выбора в качестве связи между функцией  $\mathcal{F}$  и  $e^a(\mathbf{x}, t)$  системы уравнений (2) или её эквивалента (4) состоит в том, что при таком выборе экстремумы и седловые точки функции  $\mathcal{F}$  становятся эквивалентными системе точечных целочисленных зарядов, динамика которых описывается с помощью уравнений Максвелла.

**Лемма 1.** Пусть  $\mathcal{V}$  - простая топологическая ячейка функции Морса  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ . Пусть  $e^a(\mathbf{x})$ ,  $a = 1, 2, 3$  - три дифференцируемые функции координат на  $\mathcal{V}$ , удовлетворяющие уравнению (4):

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \frac{\varepsilon}{2} |\mathbf{e}|^2,$$

где  $|\mathbf{e}|^2 = (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2$ ,  $\mathcal{F}_0$  - значение функции  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$  в экстремуме с координатами

тами  $\mathbf{x}_0$ :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = 0, \quad \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\mathbf{x}_0),$$

лежащем в  $\mathcal{V}$  ( $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}$ ), а  $\varepsilon = -1$  в случае, если экстремум - максимум, и  $\varepsilon = +1$  - если минимум. Тогда имеет место следующее равенство:

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}) = \varepsilon \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (6)$$

где:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3} \mathcal{K}^\alpha, \quad \mathcal{K}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} e^a, \quad (7)$$

и

$$J = \det \left( \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} \right). \quad (8)$$

**Доказательство.** Пусть  $e^a(\mathbf{x})$  - произвольная тройка дифференцируемых функций, заданных на  $\mathcal{V}$  и удовлетворяющая соотношению (4). В качестве такой тройки функций достаточно взять тройку функций вида:

$$e^1 = R(\mathbf{x}) \cos \Phi(\mathbf{x}) \sin \Theta(\mathbf{x}), \quad e^2 = R(\mathbf{x}) \sin \Phi(\mathbf{x}) \sin \Theta(\mathbf{x}), \quad e^3 = R(\mathbf{x}) \cos \Theta(\mathbf{x}), \quad (9)$$

где  $\Phi(\mathbf{x})$  и  $\Theta(\mathbf{x})$  - произвольные дифференцируемые функции и

$$R = \sqrt{2|\mathcal{F} - \mathcal{F}_0|}.$$

Рассмотрим формальное тождество:

$$\frac{\partial}{\partial e^a} \frac{e^a}{|\mathbf{e}|^3} = \delta(\mathbf{e}), \quad (10)$$

где  $\delta(\mathbf{x}) = \delta(e^1)\delta(e^2)\delta(e^3)$  -  $\delta$  - функция Дирака. Это тождество выполняется для любой области значений функций  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ , содержащей нулевое их значение. Такие области значений соответствуют области определения  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$  с  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ . Переходя в (10) к координатам  $\mathbf{e}$  получаем:

$$\frac{1}{|J|} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[ |J| \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{e^a}{|\mathbf{e}|^3} \right] = \frac{1}{|J|} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

где использованы известные свойства  $\delta$  - функции Дирака. Отсюда следует соотношение (6), что доказывает сформулированное утверждение.

Уравнение (6) для поля  $\mathbf{D}$  с компонентами  $D^\alpha$  можно рассматривать как уравнение для поля индукции электрического точечного заряда с величиной равной  $q = \varepsilon = \pm 1$ . Такая конструкция строится для каждой простой топологической ячейки. Следовательно, объединяя координатные карты на всех простых ячейках, можно построить глобальное поле  $\mathbf{D}$  с источниками в виде совокупности точечных зарядов, совпадающих с экстремумами функции  $\mathcal{F}$  на  $P^3$ . Для решения такой задачи необходимо решить две основные проблемы. Во-первых, доказать, что внутри пустых топологических ячеек нет зарядов, а во-вторых, что точечные заряды соответствуют седловым точкам функции  $\mathcal{F}$ .

### 3. Заряд и эйлерова характеристика

Для того, чтобы решить обе эти проблемы, рассмотрим в качестве следующего объекта пустую топологическую ячейку. Пусть  $\mathcal{S}$  - замкнутая изоповерхность  $\mathcal{F}$  с её значением, равным  $\mathcal{F}_0$ . Связь между изоповерхностью и значением функции на ней будем изображать в следующем виде:  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_0]$ . В силу изолированности критических точек функции Морса всегда существует такая изоповерхность  $\mathcal{S}_1[\mathcal{F}_1]$  со значением функции  $\mathcal{F}$ , равным  $\mathcal{F}_1$ , что топологическая ячейка  $\mathcal{V}_{01}$ , ограниченная одновременно изоповерхностями  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_0]$  и  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_1]$  ( $\partial\mathcal{V}_{01} = \mathcal{S}[\mathcal{F}_0] \cup \mathcal{S}[\mathcal{F}_1]$ ), является пустой. Для определённости будем полагать  $\mathcal{F}_0 < \mathcal{F}_1$ . Условие пустоты означает, что для всех значений  $\mathcal{F}$ , лежащих на интервале  $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ :  $\mathcal{F}_0 < \mathcal{F}_s < \mathcal{F}_1$ , изоповерхности  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_s]$  не являются особыми. Тогда на топологической ячейке определено отображение  $\mathfrak{Z}$  с помощью соотношения (4):

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_0 + \frac{1}{2}\varepsilon|\mathbf{e}|^2$$

и поле  $\mathbf{D}$  (7). Обратим теперь внимание на то, что тождество (10) выполняется внутри  $\mathcal{V}$  при произвольном выборе изоповерхности  $\mathcal{F}_0$ . При этом носитель  $\delta$ -функции в правой части после отображения в координаты  $\mathbf{x}$  сосредоточен на изоповерхности  $\mathcal{F}_0$ . Поэтому везде внутри  $\mathcal{V}_{01}$  выполнено тождество:

$$\operatorname{div}\mathbf{D}|_{\mathbf{x}\notin\mathcal{S}_0} = 0. \quad (11)$$

Исключение составляет изоповерхность со значением  $\mathcal{F}_0$ , на которой по определению  $|\mathbf{e}|^2 = 0$ , что соответствует точечному носителю  $\delta$ -функции в (10). В силу выполнения условия (11) можно констатировать, что поток через каждую изоповерхность внутри  $\mathcal{V}_{01}$  одинаков.

Вычислим поток поля  $\mathbf{D}$  через замкнутую изоповерхность  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_s]$  со значением  $\mathcal{F}$ , равным  $\mathcal{F}_s \in [\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1]$ :

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3} e^a \frac{\partial x^a}{\partial e^a} d\sigma_a.$$

Воспользуемся тождествами:

$$\frac{\partial x^a}{\partial e^a} = \frac{1}{|J|} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial e^b}{\partial x^\beta} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3} e^a \frac{\partial x^a}{\partial e^a} d\sigma_a = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{|\mathbf{e}|^3} e^a \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial e^b}{\partial x^\beta} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma} d\sigma_a = \\ &= s(\mathcal{V}) \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \frac{1}{|\mathbf{e}|^3} e^a d\sigma_a = s(\mathcal{V}). \end{aligned}$$

Последний интеграл справа в этом соотношении берется по сфере радиуса  $R_s = \sqrt{2|\mathcal{F}_s - \mathcal{F}_0|}$ , в которую отображается изоповерхность  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_s]$  в соответствии с (4). Множитель  $s(\mathcal{V})$  - целочисленная величина, равная степени отображения  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$  области  $\mathcal{V}$  в шар радиуса  $R_s$ . Согласно общему определению степени отображения [16],

стоящая в правой части величина есть не что иное, как индекс векторного поля  $e^a$ . Поскольку на изоповерхности величина  $|\mathbf{e}|^2 = 2|\mathcal{F}_s - \mathcal{F}_0| = \text{const}$  постоянная, то выражение для  $Q$  соответствует индексу единичного векторного поля  $\mathbf{e}/|\mathbf{e}|$  на изоповерхности  $S$ , что в свою очередь, равно эйлеровой характеристике  $\mathcal{V}_s$ , ограниченной изоповерхностью  $S[\mathcal{F}_s]$ . В силу этого число  $Q$  равно половине эйлеровой характеристике поверхности  $S[\mathcal{F}_s]$  [16], а по построению является величиной заряда в ячейке, ограниченной изоповерхностью  $\mathcal{S}$ , т.е. внутри ячейки  $\mathcal{V}$ . В результате величина заряда  $Q$  равна с точностью до знака эйлеровой характеристике ячейки  $\mathcal{V}$ :

$$Q = \pm \chi(\mathcal{V}) = \pm \frac{1}{2} \chi(S[\mathcal{F}_s]). \quad (12)$$

Следовательно, доказана:

**Лемма 2.** Для каждой пустой топологической ячейки  $\mathcal{V}_{s0}$ , ограниченной замкнутыми изоповерхностями  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_s]$  и  $\mathcal{S}[\mathcal{F}_0]$  ( $\partial \mathcal{V}_{s0} = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}$ ), поток векторного поля  $\mathbf{D}$  через любую изоповерхность, лежащую внутри  $\mathcal{V}_{s0}$  одинаков и равен целочисленной величине  $Q$ , определенной соотношением (12), т.е. эйлеровой характеристике области, ограниченной этой изоповерхностью.

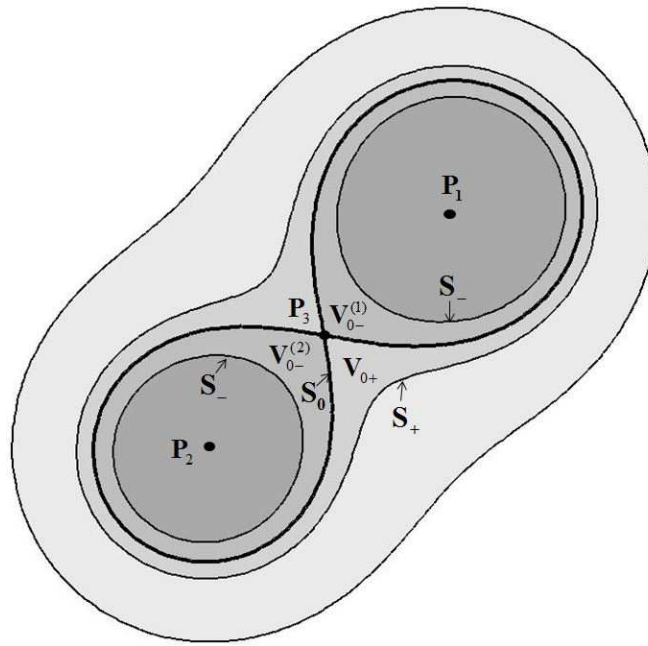
#### 4. Особые изоповерхности

Пусть  $\mathcal{V}$  - предельная простая топологическая ячейка функции Морса  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ , с границей  $\mathcal{S} = \partial \mathcal{V}$ , являющейся, по определению, особой изоповерхностью функции  $\mathcal{F}$  со значением  $\mathcal{F}_0$ , на которой лежит в общем случае  $K$  седловых точек с координатами  $\mathbf{x}_j$ ,  $j = 1, \dots, K$ . Введем дополнительно две изоповерхности  $\mathcal{S}_+$  и  $\mathcal{S}_-$ , соответствующие значениям функции  $\mathcal{F}$ :  $\mathcal{F}_+ = \mathcal{F}_0 + \delta \mathcal{F}$  и  $\mathcal{F}_- = \mathcal{F}_0 - \delta \mathcal{F}$ , где  $\delta \mathcal{F}$  - бесконечно малое вещественное число, такое, что выполнено условие:  $\mathcal{V}_- \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_+$ , где  $\mathcal{V}_+$  и  $\mathcal{V}_-$  - области пространства, ограниченные изоповерхностями  $\mathcal{S}_+ = \partial \mathcal{V}_+$  и  $\mathcal{S}_- = \partial \mathcal{V}_-$ , соответственно.

В силу изолированности критических точек функции Морса ячейки  $\mathcal{V}_{0-}$  и  $\mathcal{V}_{0+}$  являются пустыми топологическими ячейками. Поэтому внутри каждой из этих топологических ячеек индексы изоповерхностей не изменяются при переходе от одного значения  $\mathcal{F} \in [\mathcal{F} \pm \delta \mathcal{F}]$  к другому. Обозначим значения индекса  $Q$  для изоповерхностей, лежащих внутри  $\mathcal{V}_{0+}$  через  $Q_+$ , для изоповерхностей вне  $\mathcal{V}_{0-}$  - через  $Q_-$ . Поскольку внутри пустых ячеек  $\mathcal{V}_{0+}$  и  $\mathcal{V}_{0-}$  значения индекса  $Q$  не меняются, то этот индекс меняется скачком от  $Q_-$  до  $Q_+$  при переходе через особую изоповерхность  $\mathcal{V}_0$ . Таким образом, особая изоповерхность обладает целочисленным зарядом, равным  $Q_0 = Q_+ - Q_-$ . Для иллюстрации на рис. (9) приведена двумерная структура топологических ячеек, ограниченных особой изоповерхностью с одной седловой точкой  $P_3$ . На рис. (9)  $V_{0-}^{(1)}$  и  $V_{0-}^{(2)}$  - две несвязных компоненты ячейки  $\mathcal{V}_{0-}$ , а  $P_1$  и  $P_2$  - точки экстремумов функции  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ .

Величина заряда на поверхности, согласно классической электродинамике, определяется величиной скачка нормальной компоненты поля напряженности при переходе через эту поверхность. Отсюда следует, что, если нормальная компонента поля  $\mathbf{D}$  на особой изоповерхности непрерывна, то поверхностная плотность заряда на ней равна нулю. В этом случае единственным источником заряда, расположенного на особой изоповерхности, являются седловые точки. Седловые точки





**Рис. 9.** Пример двумерной структуры особой изоповерхности, ограничивающей две простые ячейки

$\mathcal{F}$  в этом случае представляют собой точечные заряды величиной  $\pm 1$ , знак которых определяется индексом Пуанкаре-Хопфа, как и в случае с экстремумами. Если на особой изоповерхности расположено  $M$  седловых точек, с индексами Пуанкаре-Хопфа  $\varepsilon_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ , то имеет место соотношение:

$$Q_+ - Q_- = \pm \left( \chi(\mathcal{V}_+) - \chi(\mathcal{V}_-) \right) = \sum_{k=1}^M \varepsilon_k, \quad (13)$$

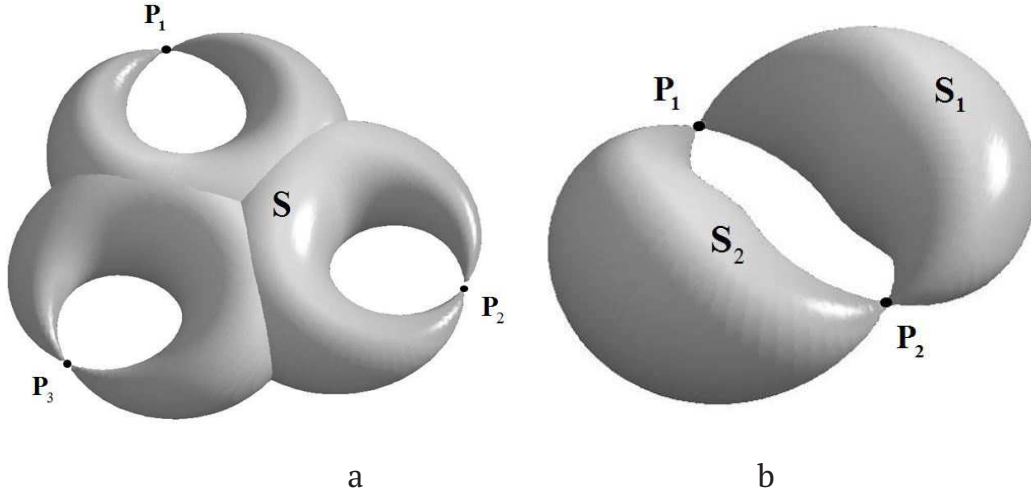
где сумма берется по всем седловым точкам особой изоповерхности. Примеры особых изоповерхностей приведены на рис. (10)

Из предыдущих построений следует:

**Лемма 3.** Величина заряда поля  $\mathbf{D}$  (7), сосредоточенная на любой особой изоповерхности функции Морса, является целочисленной величиной, значение которой вычисляется с помощью соотношения (13).

Целочисленность величины заряда, сосредоточенной на особой изоповерхности, еще не позволяет распространить уравнение (6) на всю совокупность критических точек  $\mathcal{F}$ , что является конечной точкой построений. Проблема состоит в том, что на особой изоповерхности заряд может быть распределен непрерывно. Это связано с тем, что на каждой простой ячейке и пустых топологических ячейках поле  $\mathbf{D}$  строится по отдельности с помощью введения отдельной координатной карты  $e^a(\mathbf{x}, t)$ . Для того, чтобы на особых изоповерхностях отсутствовали поверхностные заряды, необходимо согласовать выбор координат  $e^a(\mathbf{x}, t)$  на каждой ячейке с выбором аналогичных функций на других ячейках, граничащих с данной. Это возможно сделать, поскольку  $e^a(\mathbf{x}, t)$  определены с помощью соотношений (2), допускающих произвол, например, в виде произвольного выбора функций  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  и  $\Theta(\mathbf{x}, t)$  в (9).

Согласно классической электродинамике, характер распределения заряда опре-



**Рис. 10.** Примеры предельных топологических ячеек с различным числом седловых точек каждой и разным числом компонент, *a* - предельная простая топологическая ячейка с тремя седловыми точками на границе, *b* - топологическая ячейка, состоящая из двух простых предельных ячеек с двумя седловыми точками на границе.

деляется величиной скачка нормальной составляющей поля  $\mathbf{D}$  на особой изоповерхности. Следовательно, для того, чтобы непрерывно распределенный поверхностный заряд на особой изоповерхности отсутствовал, т.е. был точечным и сосредоточен в седловых точках, необходимо и достаточно непрерывности нормальной составляющей поля  $\mathbf{D}$  при переходе через особую изоповерхность.

Используя (2), компоненты поля  $\mathbf{D}$  можно записать в виде:

$$D^\alpha = \varepsilon \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3} \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mathcal{F}, \quad (14)$$

где:

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{dx^\alpha}{de^a} \frac{dx^\beta}{de^a}. \quad (15)$$

Нормальная составляющая поля  $\mathbf{D}$  на любой изоповерхности  $S_i = \partial V_i$ , в том числе, особой имеет вид:

$$D_n = \frac{(\mathbf{D}, \nabla \mathcal{F})}{|\nabla \mathcal{F}|} = \varepsilon \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3 |\nabla \mathcal{F}|} \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mathcal{F} \nabla_\alpha \mathcal{F} = \varepsilon \frac{|J|}{|\mathbf{e}| |\nabla \mathcal{F}|}. \quad (16)$$

Здесь использовано тождество:

$$\gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mathcal{F} \nabla_\alpha \mathcal{F} = |\mathbf{e}|^2,$$

следующее из соотношения (2).

Пусть особая изоповерхность  $S_{12}$  является границей двух соприкасающихся по ней топологических ячеек  $V_1$  и  $V_2$ , т.е.  $S_{12} \subset \partial V_1 \cup \partial V_2$ . Обозначим через  $D_n^{(1)}$  и  $D_n^{(2)}$  значения нормальной составляющей  $D_n$  в точках на особой изоповерхности, полученные предельными переходами внутри областей  $\mathcal{V}_1$  и  $\mathcal{V}_2$ , соответственно:

$$D_n^{(1)} = \lim_{P(\in V_1) \rightarrow P_S \in S_{12}} D_n, \quad D_n^{(2)} = \lim_{P(\in V_2) \rightarrow P_S \in S_{12}} D_n,$$

где пределы слева и справа берутся по последовательности точек  $P$ , лежащих внутри простых ячеек  $V_1$  и  $V_2$ , соответственно. Условие отсутствия поверхностных зарядов эквивалентно условию непрерывности  $D_n$ :

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)}.$$

Поскольку сама функция  $\mathcal{F}$  является гладкой, то функция  $|\nabla \mathcal{F}|$  непрерывная всюду на  $P^3$ . Следовательно, условие непрерывности  $D_n$  в каждой точке  $P_S \in S_{12}$  эквивалентно равенству:

$$\lim_{P(\in V_1) \rightarrow P_S \in S_i} \frac{|J|}{\sqrt{2|\mathcal{F} - \mathcal{F}_1|}} \Big|_P = \lim_{P(\in V_2) \rightarrow P_S \in S_i} \frac{|J|}{\sqrt{2|\mathcal{F} - \mathcal{F}_2|}} \Big|_P, \quad (17)$$

где  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  - значения функции  $\mathcal{F}$  в экстремумах этих ячеек. Знак минус появляется в этом соотношении в силу того, что при пересечении особой изоповерхности всегда знак нормали меняется на обратный. Отсюда следует, что на особых изоповерхностях якобиан  $J$  должен испытывать скачок в соответствии с равенством:

$$\frac{|J_1|}{|J_2|} = \frac{\sqrt{|\mathcal{F}_S - \mathcal{F}_1|}}{\sqrt{|\mathcal{F}_S - \mathcal{F}_2|}}, \quad (18)$$

где  $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}(\mathbf{x}_S, t)$  - значение функции  $\mathcal{F}$  на рассматриваемой особой изоповерхности:  $\mathbf{x}_S \in S_i$ ,  $J_1 = \lim_{P(\in V_1) \rightarrow P_S \in S_i} J$ ,  $J_2 = \lim_{P(\in V_3) \rightarrow P_S \in S_i} J$ . Этот факт крайне важен с точки зрения того, что  $|J|$  фактически представляет собой модуль квадрата волновой функции, как это было показано в [4]. Этот факт будет рассмотрен далее в данной статье.

При выполнении условий (17) и (18) на всех особых изоповерхностях  $\mathcal{F}$  заряд может быть сосредоточен только в седловых точках, в которых условие непрерывности может не выполняться. В силу этого источниками поля  $\mathbf{D}$  будут исключительно критические точки  $\mathcal{F}$ .

Опираясь на эти рассуждения, устанавливаем:

**Утверждение 1.** Пусть поле  $\mathbf{D}$  построено на всех простых и пустых топологических ячейках функции  $\mathcal{F}$  с помощью соотношений (2) и (7) и введения на каждой из ячеек функций  $e^a(\mathbf{x}, t)$ . Тогда при условии выполнения соотношений (17) и (18) на всех особых изоповерхностях, поле  $\mathbf{D}$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} D^\alpha = \text{div} \mathbf{D} = 4\pi \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k), \quad (19)$$

где, кроме экстремумов, точечный заряд располагается в каждой седловой точке с соответствующим зарядом  $\varepsilon_k$ , определенным как и раньше в соответствии с формулой (3).

Правая часть уравнения (19) представляет собой плотность точечных зарядов. Каждая седловая точка будет давать  $\delta$ -образный вклад в плотность заряда, равный  $\pm 1$ . Поскольку уравнение (19) при выполнении граничных условий (17) и (18) описывает поле  $\mathbf{D}$  на всей гиперплоскости  $P^3$ , его можно рассматривать как первое уравнение Максвелла для индукции  $\mathbf{D}$  фундаментального электрического поля.

## 5. Геометрические маркеры и уравнения движения частиц

Для введения пространственного усреднения, аналогичного квантовой теории, введем “функцию плотности” материи, исходя из введенных выше параметров геометрического описания. Важную роль в концепции играют поля  $e^a(\mathbf{x}, t)$ . Смысл введения полей  $e^a(\mathbf{x}, t)$  не исчерпывается только их использованием в построении электродинамики с целочисленными зарядами и классификации частиц. Эти поля позволяют ввести инвариантную плотность, которая используется для построения геометрического усреднения. Основой для этого служит формальное соотношение:

$$\frac{\partial e^a}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} = 0, \quad a = 1, 2, 3. \quad (20)$$

Это уравнение описывает перенос криволинейных координат  $e^a$  относительно декартовой системы координат (системы отсчёта)  $\mathbf{x}$  фонового пространства с локальной скоростью  $\mathbf{V}$ . В частности, из (59) следует:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\beta} = 0, \quad (21)$$

что означает, что точки изоповерхности функции  $\mathcal{F}$  переносятся с локальной скоростью  $\mathbf{V}$ .

Уравнение (59) во всех точках, где преобразование координат  $\mathfrak{Z} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$  не вырождено, позволяет однозначно вычислить поле  $\mathbf{V}$  через функции  $e^a(\mathbf{x}, t)$ :

$$V^\alpha = -\frac{\partial x^\beta}{\partial e^a} \frac{\partial e^a}{\partial t}.$$

Таким образом,  $e^a(\mathbf{x}, t)$  можно рассматривать как гидродинамические маркеры, переносимые потоком с локальной скоростью  $\mathbf{V}$ . Поэтому в дальнейшем мы будем называть функции  $e^a(\mathbf{x}, t)$  геометрическими маркерами, учитывая то, что в рассматриваемом подходе они связаны с геометрией физического пространства соотношениями (2).

Уравнение (59) после несложных преобразований [4] приводит к уравнению для якобиана  $J = \det\{\partial \mathbf{e} / \partial \mathbf{x}\}$  отображения  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$ . Дифференцируя (59) по координатам  $\mathbf{x}$ , а затем сворачивая результат с матрицей  $\partial x^\alpha / \partial e^a$  по обоим индексам, приходим к следующему соотношению:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( V^\beta \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} \right) = 0.$$

Поскольку матрицы с компонентами  $J_a^\alpha = \partial x^\alpha / \partial e^a$  и  $J_\alpha^a = \partial e^a / \partial x^\alpha$  взаимно обратны, то имеем следующие тождества:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial |J|}{\partial t}, \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( V^\beta \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} \right) = V^\beta \frac{1}{|J|} \frac{\partial |J|}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} V^\beta.$$

Отсюда следует уравнение для якобиана  $J$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} |J| + \frac{\partial}{\partial x^\beta} (V^\beta |J|) = 0, \quad (22)$$



описывающее его изменения со временем и имеющее вид дифференциального закона сохранения плотности  $J$ .

Поскольку для  $|J|$  выполняется закон сохранения, то это позволяет на каждой топологической ячейке ввести инвариантное геометрическое усреднение:

$$\overline{Q} = \int_{\mathcal{V}_0} Q(\mathbf{x}, t) \tilde{J} d\mathcal{V}, \quad (23)$$

с сохраняющейся нормировкой:

$$\mathcal{V}_0 = \int_{\mathcal{V}_0} |J| d\mathcal{V} = \text{const},$$

где интеграл берется по объёму топологической ячейки  $\mathcal{V}_0$ . При этом удобно ввести нормированную плотность:

$$\tilde{J} = \frac{1}{|\mathcal{V}_0|} |J|, \quad \int_{\mathcal{V}_0} \tilde{J} d\mathcal{V} = 1. \quad (24)$$

Введение геометрического усреднения даёт возможность перейти по аналогии с квантовой механикой от описания распределённых объектов - топологических ячеек  $\mathcal{V}_i$ , к сосредоточенным параметрам - их средним координатам, скоростям и ускорениям:

$$\begin{aligned} X^\alpha &= \bar{x}^\alpha = \int_{\mathcal{V}_i} x^\alpha \tilde{J} dV, & U^\alpha &= \frac{dX^\alpha}{dt} = \int_{\mathcal{V}_i} V^\alpha \tilde{J} dV, \\ \frac{dU^\alpha}{dt} &= \frac{d^2 X^\alpha}{dt^2} = \int_{\mathcal{V}_i} \left( \frac{\partial V^\alpha}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \tilde{J} dV = \int_{\mathcal{V}_i} \frac{dV^\alpha}{dt} \tilde{J} dV. \end{aligned}$$

При выводе этих соотношений использовалось то, что интегралы берутся по топологическим ячейкам, границами которых являются изоповерхности функции  $\mathcal{F}$ , а так же уравнения (22) и (21), т.е. то, что граница топологической ячейки переносится потоком  $\mathbf{V}$  (см. [4]).

## 6. Уравнения Ньютона

Появление в теории инвариантной процедуры усреднения с плотностью, подчиняющейся дифференциальному закону сохранения (22), позволяет интерпретировать поле  $\mathbf{V}$  как характеристику микромасштабного электромагнитного поля, фигурирующего в квантовой теории. Как было показано в [4], поле  $\mathbf{V}$  можно интерпретировать как линейную комбинацию векторного потенциала  $\mathbf{A}$  электромагнитного поля с градиентом некоторого скалярного поля  $\chi$ , который отождествляется с функцией действия частицы:

$$\mathbf{V} = -\gamma_0 \mathbf{A} + \nabla \chi. \quad (25)$$

Здесь  $\gamma_0 = e/m_e c$ , где  $e$  - заряд электрона,  $m_e$  - его масса, а  $c$  - скорость света. Множитель  $\gamma_0$  введен для прямого сопоставления появляющихся далее в теории уравнений уравнениям Ньютона и Шредингера. Данное представление для поля переноса геометрических маркеров  $\mathbf{V}$  является неоднозначным и определяется выбором

функции  $\chi$ . Далее мы покажем, что этому выбору можно придать ясный физический смысл.

Последнее из соотношений (25) по своему смыслу представляет собой уравнение Ньютона для усреднённых координат частиц, что собственно является содержанием теоремы Зоммерфельда о средних. Необходимо лишь показать, что в правой части этого уравнения содержатся силы, которые можно интерпретировать как классические силы Кулона и Лоренца и, по возможности, тяготения. Для этого воспользуемся тождеством:

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + \frac{\partial \chi}{\partial t} + \gamma_0 c \Phi \right) - \gamma_0 [\mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{A}]^\alpha - \gamma_0 c \left( \frac{1}{c} \frac{\partial A^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} \right). \quad (26)$$

Функция  $\Phi$  введена пока формально, что позволяет теперь идентифицировать элементы этого представления, как параметры некоторого микромасштабного электромагнитного поля следующим образом:

$$E^\alpha = -\frac{1}{c} \frac{\partial A^\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha}, \quad B^\alpha = \text{rot} \mathbf{A}.$$

Поля  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$  отличаются от полей  $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{A}$  фундаментальной электродинамики. Установление связи между этими полями является важной задачей, которую придется решать в дальнейшем. С помощью процедуры усреднения мы можем теперь ввести усреднённое (макроскопическое) электромагнитное поле с параметрами

$$\bar{\mathbf{A}} = \int_{V_i} \mathbf{A} \tilde{J} dV, \quad \bar{\mathbf{B}} = \int_{V_i} \mathbf{B} \tilde{J} dV, \quad \bar{\mathbf{E}} = \int_{V_i} \mathbf{E} \tilde{J} dV.$$

Это позволяет “микроскопические” поля  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{E}$  представить следующим образом:

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}', \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}', \quad \mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} + \mathbf{E}'.$$

Здесь  $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{E}'$  - флуктуации, т.е. поля с нулевым средним.

**Определение 3.** Поля  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$  будем в дальнейшем называть локальными или микроскопическими динамическими электромагнитными полями, а поля  $\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{B}}$  и  $\bar{\mathbf{A}}$  - макроскопическими или усреднёнными динамическими полями.

В результате перехода к усреднённым полям формула для среднего ускорения примет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{V}} = \gamma_0 \bar{\mathbf{E}} - \gamma_0 [\bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{B}}] - \nabla_X \bar{U} + \mathbf{F}_q. \quad (27)$$

Это соотношение выглядит как уравнение Ньютона заряженной частицы, находящейся в электромагнитном поле  $\{\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{E}}\}$  и дополнительном консервативном поле с потенциалом  $\bar{U}$ :

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, t) = \sum_{|\mathbf{k}|=0} \frac{1}{|\mathbf{k}|!} \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} U(\mathbf{X}, t)}{\partial X_1^{k_1} \partial X_2^{k_2} \partial X_3^{k_3}} M_{\mathbf{k}}(t).$$

где

$$U(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 - \chi_t - \gamma_0 c \Phi, \quad (28)$$

$\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$  - мультииндекс,  $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + k_3$ ,  $|\mathbf{k}|! = k_1!k_2!k_3!$ ,

$$M_{\mathbf{k}} = M_{k_1 k_2 k_3}(t) = \int_{\mathcal{V}_i} (x^1 - X^1)^{k_1} (x^2 - X^2)^{k_2} (x^3 - X^3)^{k_3} \tilde{J} dV$$

Дополнительная сила  $\mathbf{F}_q$ , имеющая вид:

$$F_q^\alpha = \int_{\mathcal{V}_i} \gamma_0 [\mathbf{V}' \times \mathbf{B}']^\alpha \tilde{J} dV,$$

может рассматриваться как флуктуационная добавка, аналогичная добавкам, возникающим в квантовой теории при выводе усреднённых уравнений Ньютона из операторных уравнений. Подробный вывод всех этих соотношений можно найти в [4].

**Утверждение 2.** Средняя координата топологической ячейки, удовлетворяет уравнению Ньютона (27), имеющему вид уравнения движения точечной частицы в электромагнитном поле, которое описывается усреднёнными динамическими полями  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{E}}$ ,  $\bar{U}$ .

## 7. Квантовые уравнения

Заметим, что соотношение (28) представляет собой способ придать физический смысл функции  $\chi$  в представлении (25). При заданном потенциале  $U(\mathbf{x}, t)$  соотношение (28) можно рассматривать как уравнения Якоби:

$$\chi_t + \frac{1}{2} \left( |\nabla \chi|^2 + 2\gamma_0(\mathbf{A}, \nabla \chi) + \gamma_0^2 |\mathbf{A}|^2 \right) + \gamma_0 c \Phi + U = 0. \quad (29)$$

для функции  $\chi$ , которая представляет собой в этом случае функцию действия для частицы в электромагнитном поле с потенциалами  $\Phi$  и  $\mathbf{A}$  и в скалярном поле с потенциалом  $U$ . При такой интерпретации для замкнутого описания динамики частиц необходимо иметь способ определения потенциала  $U$ , исходя из некоторых физических соображений, которые не содержатся пока в представленном формализме. Чисто классическая форма уравнения Якоби даёт возможность интерпретировать  $U$  как потенциальную энергию поля тяготения, поскольку среди полей классической физики это единственное подходящее объяснение. Однако, для того, чтобы получить подходящее описание для потенциала  $U$ , необходимы дополнительные исследования.

Вместе с усреднённым уравнением Ньютона в рамках такого подхода, как это подробно описано в [4], естественным образом появляется и уравнение Шредингера для волновых функций:

$$\Psi = \sqrt{|\tilde{J}|} e^{i\chi/\hbar}. \quad (30)$$

Используя (29), с учетом (25), простыми вычислениями показывается, что функция (1), удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( -i\hbar \nabla - \gamma_0 \mathbf{A} \right)^2 \Psi + \left( \gamma_0 \Phi - U_G \right) \Psi, \quad (31)$$

где  $\Phi$  - потенциал электрического поля и

$$U_G = U - \frac{\hbar^2}{2} \frac{\Delta|J|}{|J|}. \quad (32)$$

Отсюда, в частности, следует, что  $|\tilde{J}|$  выполняет роль плотности вероятностного распределения квантовой механики, а соотношение:

$$|\tilde{J}| = |\Psi|^2, \quad (33)$$

имеющее здесь чисто геометрический смысл, выполняет роль статистического постулата Борна, заменяя усреднение по ансамблю геометрическим усреднением.

Как и  $U$  остаточный потенциал  $U_G$  представляет собой потенциальную энергию некоторого “остаточного” поля по отношению к электромагнитному полю. Поэтому этот остаточный потенциал так же должен быть связанным с потенциалом гравитационного поля.

**Утверждение 3.** Функция (1), представляющая собой аналог волновой функции частицы, но имеющая геометрический смысл, удовлетворяет уравнению Шредингера (31) частицы, движущейся в электромагнитном поле, которое описывается динамическими локальными полями  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ .

## 8. Интегралы движения динамики полей и частиц

Для того, чтобы завершить общие построения теории и перейти к анализу физических следствий из неё, полезно рассмотреть вопрос об интегралах движения построенных уравнений. В силу того, что в данной теории усреднённые уравнения Ньютона и уравнения Шредингера являются разной формой одного и того же подхода, т.е. определяются скоростью переноса  $\mathbf{V}$  и фундаментальным потенциалом  $\mathcal{F}$ , интегралы движения усреднённых уравнений будут являться интегралами движения и уравнений фундаментальных полей. Как было показано в [4], интегралами движения усреднённой системы уравнений являются все интегралы вида:

$$I = \int_{V_i} L(\mathbf{x}, t) \tilde{J} dV, \quad (34)$$

где интеграл берется по топологической ячейке, а функция  $L(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (35)$$

**Утверждение 4.** Любая функция только геометрических маркеров является интегралом движения уравнений динамических полей как макроскопических (усреднённых), так и микроскопических (локальных).

Доказательство строится прямым дифференцированием (34) с учётом уравнения (22) для Якобиана:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_i} L(\mathbf{x}, t) |J| dV = \int_{V_i} \left( \frac{\partial L}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \right) \tilde{J} dV = 0. \quad (36)$$



В силу (59) все такие функции должны иметь следующий вид:

$$L(\mathbf{x}, t) = L(e^1(\mathbf{x}, t), e^2(\mathbf{x}, t), e^3(\mathbf{x}, t)),$$

т.е. являются функциями только координат  $\mathbf{e}$ . В частности, такими функциями являются  $\mathcal{F}$ , а так же  $\chi$ .

Одним из интегралов движения является величина:

$$\mathcal{V}_0 = \int_{\mathcal{V}_i} |J| dV,$$

равная нормировочному коэффициенту  $\mathcal{V}_0$  из (24). Собственно это и обеспечивает сохранение нормировки волновых функций  $\Psi$  из (1) и (33). Важным является то обстоятельство, что величина:

$$\mathcal{M} = m_0 \int_{\mathcal{V}_i} |J| dV = m_0 \mathcal{V}_0,$$

входит в усреднённые уравнения Ньютона единственным универсальным множителем, аналогичным массе частицы как топологической ячейки. Отсюда следует вывод, что эта величина в данной теории представляет, с точностью до некоторого размерного множителя  $m_0$ , “массу” топологической ячейки. При этом величину:

$$\rho_m = m_0 |J|$$

следует рассматривать, как плотность массы материи. Масса топологической ячейки  $\mathcal{M}$  взята в кавычки по той причине, что реальная масса частицы, как это обсуждается далее, будет вычисляться, как множитель в уравнении относительного движения внутренней топологической ячейки по отношению к внешней. Поэтому реальные значения масс частиц будут некоторыми комбинациями масс топологических ячеек. Этот важный факт позволяет уже более детально сопоставлять полученные уравнения Ньютона уравнениям классической и квантовой механики.

Однако, тот факт, что интегралом движения являются все возможные функции вида  $I(\mathbf{e})$ , указывает на то, что масса частиц, плотность материи и сама плотность пространственного усреднения  $|J|$  могут в реальности иметь более общий вид. В частности, все соотношения, касающиеся вывода уравнений Ньютона и квантовых уравнений, остаются неизменными, если в этих уравнениях  $|J|$  заменить на функцию:

$$\mathcal{J} = I(\mathbf{e}) |J|. \quad (37)$$

Вместе с тем, выбор той или иной функции  $I(\mathbf{e})$  определяет распределение плотности массы в пространстве, а так же конечные значения масс частиц. Эти величины теперь будут определяться соотношениями:

$$M = m_0 \int_{\mathcal{V}_0} \mathcal{J} dV \quad (38)$$

и

$$\rho_m = m_0 \mathcal{J} \quad (39)$$

на каждой топологической ячейке. Эти величины по смыслу построения обладают важными свойствами, которые связаны с их сохранением.

**Утверждение 5.** Любая функция  $\rho_m$ , определённая соотношением (39), удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_m \mathbf{V}) = 0, \quad (40)$$

а величина  $M$  (38) сохраняется при движении топологической ячейки:

$$\frac{dM}{dt} = 0.$$

Произвол в выборе  $I(\mathbf{e})$  означает, что выбор функции  $I(\mathbf{e})$  не может быть сделан исключительно из математических соображений и должен определяться некоторыми экспериментальными фактами или физическими принципами. Такие факты и соображения будут сформулированы в следующей части данной работы.

## 9. Уравнение индукции фундаментальных полей

Основой описания геометрии физического пространства в предлагаемой теории является функция высоты  $\mathcal{F}$ , называемая также фундаментальным потенциалом, которая выделяет в объемлющем пространстве  $W^4$  гиперповерхность с помощью алгебраического уравнения:

$$u = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t),$$

где  $u$  - выделенная координата в  $W^4$ . С этой функцией связываются геометрические маркеры  $e^a(\mathbf{x}, t)$ ,  $a = 1, 2, 3$ , удовлетворяющие уравнению (I.1.4):

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \frac{\varepsilon}{2} |\mathbf{e}|^2, \quad (41)$$

на каждой простой или пустой топологических ячейках (см. [21]). В этом соотношении  $\mathcal{F}_0$  - значение в экстремуме внутри простой ячейки, а  $\varepsilon = \pm 1$  в зависимости от того, является ли минимумом или максимумом. В структуре фундаментальных полей наиболее важным общим элементом, связанным с геометрическими маркерами  $e^a(\mathbf{x}, t)$ ,  $a = 1, 2, 3$ , т.е. с геометрией физической гиперповерхности, является поле с компонентами:

$$\mathcal{K}^\alpha = |J| \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} e^a, \quad J = \det \left( \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{x}} \right). \quad (42)$$

В дальнейшем векторное поле  $\mathbf{K}$  будем называть индукцией фундаментального поля. Изменения его со временем определяют динамику всех фундаментальных полей, как электромагнитных, так и гравитационных. Для вывода уравнения динамики этого поля представим его в несколько ином виде. Используя очевидные тождества:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} &= \delta^\alpha_\beta, \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial e^b}{\partial x^\alpha} = \delta^b_a, \\ \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} &= \frac{1}{|J|} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial e^b}{\partial x^\beta} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma} = \frac{1}{|J|} \varepsilon_{abc} [\nabla e^b \times \nabla e^c]^\alpha, \end{aligned} \quad (43)$$

поле  $\mathbf{K}$  можно записать так:

$$\mathbf{K} = \varepsilon_{abc} [\nabla e^b \times \nabla e^c] e^a. \quad (44)$$

Вычислим производную по времени от поля  $\mathbf{K}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} = \varepsilon_{abc} [\nabla e^b \times \nabla e^c] \frac{\partial e^a}{\partial t} + 2\varepsilon_{abc} \left[ \nabla \frac{\partial e^b}{\partial t} \times \nabla e^c \right] e^a. \quad (45)$$

Рассмотрим два слагаемых в правой части последнего соотношения по отдельности. Воспользуемся еще одним очевидным тождеством:

$$\varepsilon_{abc} [\nabla e^b \times \nabla e^c] \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} = |J| \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} = |J| \delta_\beta^\alpha,$$

которое следует из (43). Имеем:

$$\varepsilon_{abc} [\nabla e^b \times \nabla e^c]^\alpha \frac{\partial e^a}{\partial t} = -\varepsilon_{abc} [\nabla e^b \times \nabla e^c] \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} V^\beta = -|J| \delta_\beta^\alpha V^\beta = -|J| V^\alpha. \quad (46)$$

Для второго слагаемого в правой части (45) находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{abc} \left[ \nabla \frac{\partial e^b}{\partial t} \times \nabla e^c \right] e^a &= \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} e^a \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left[ \frac{\partial e^b}{\partial t} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma} \right] = \\ &= \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left[ e^a \frac{\partial e^b}{\partial t} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma} \right] - \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} \frac{\partial e^b}{\partial t} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma} = \text{rot} \mathbf{Z} - |J| \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь  $\mathbf{Z}$  - поле с компонентами:

$$Z_\gamma = \varepsilon_{abc} e^a \frac{\partial e^b}{\partial t} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma} = -\varepsilon_{abc} e^a V^\beta \frac{\partial e^b}{\partial x^\beta} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma} = -V^\beta \lambda_{\beta\gamma}. \quad (48)$$

Величины

$$\lambda_{\beta\gamma} = \varepsilon_{abc} e^a \frac{\partial e^b}{\partial x^\beta} \frac{\partial e^c}{\partial x^\gamma}$$

вычислим с помощью следующего тождества:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\mu\nu} \lambda_{\alpha\beta} = \det \begin{vmatrix} \delta_\gamma^\alpha & \delta_\gamma^\beta & \delta_\gamma^\gamma \\ \delta_\mu^\alpha & \delta_\mu^\beta & \delta_\mu^\gamma \\ \delta_\nu^\alpha & \delta_\nu^\beta & \delta_\nu^\gamma \end{vmatrix} \lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta) = 2\lambda_{\mu\nu}.$$

Здесь использовалось свойство антисимметричности  $\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}$ . С другой стороны, имеем:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \lambda_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{abc} e^a \frac{\partial e^b}{\partial x^\alpha} \frac{\partial e^c}{\partial x^\beta} = \mathcal{K}^\gamma.$$

Отсюда находим:

$$\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{K}^\gamma \varepsilon_{\gamma\mu\nu}. \quad (49)$$

Подставляя это соотношение в (48), окончательно получаем:

$$Z_\gamma = -V^\beta \lambda_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} V^\beta \mathcal{K}^\mu \varepsilon_{\mu\beta\gamma}, \quad (50)$$

или в векторном виде:

$$\mathbf{Z} = -\frac{1}{2}[\mathbf{K} \times \mathbf{V}]. \quad (51)$$

Подставляя полученные соотношения (46), (47) и (51) в (45), окончательно находим:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} = -\text{rot}([\mathbf{K} \times \mathbf{V}]) - 3|\mathbf{J}|\mathbf{V}. \quad (52)$$

Это уравнение есть уравнение индукции фундаментального поля  $\mathbf{K}$ .

**Утверждение 2.** Векторное поле (42)

$$\mathbf{K} = |\mathbf{J}|e^a \frac{\partial x^a}{\partial e^a},$$

при условии выполнения граничных условий (I.4.5) удовлетворяет на каждой топологической ячейке уравнениям:

$$\text{div}(\mathbf{K}) = 3|\mathbf{J}|. \quad (53)$$

и (52).

**Доказательство.** Доказательство второго уравнения представлено выше, а уравнение (53), как было показано в [22], является прямым следствием тождества:

$$\frac{\partial e^a}{\partial e^a} = 3. \quad (54)$$

Переходя в этом дифференциальном тождестве к координатам  $\mathbf{x}$  на  $\mathbf{R}^3$ , приходим к записи этого тождества в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \left( |\mathbf{J}| \frac{\partial x^a}{\partial e^a} e^a \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x^a} \mathcal{K}^a = 3|\mathbf{J}|. \quad (55)$$

Последнее соотношение в точности совпадает с (53), что и доказывает сформулированное утверждение.

## 10. Следствия уравнения индукции фундаментального поля

Получим из уравнения (52) ряд соотношений, которые позволят придать новый смысл полям фундаментальной электродинамики. Для этого рассмотрим поле  $\mathbf{N}$  вида:

$$\mathbf{N} = N(\mathbf{e})\mathbf{K}, \quad (56)$$

где  $N(\mathbf{e}) = N(e^1, e^2, e^3)$  - дифференцируемая функция от геометрических маркеров. Вычислим производную по времени от  $\mathbf{N}$ . Имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial e^a} \frac{\partial e^a}{\partial t} \mathbf{K} + N(\mathbf{e}) \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t}. \quad (57)$$

Для того, чтобы получить более удобное следствие, вычислим компоненты следующего вектора:

$$\begin{aligned} \text{rot}([N(\mathbf{e})\mathbf{K} \times \mathbf{V}]) &= N(R)\text{rot}([\mathbf{K} \times \mathbf{V}]) + \frac{\partial N}{\partial e^a} [\nabla e^a \times [\mathbf{K} \times \mathbf{V}]] = \\ &= N(\mathbf{e})\text{rot}([\mathbf{K} \times \mathbf{V}]) + \frac{\partial N}{\partial e^a} \mathbf{K}(\nabla e^a, \mathbf{V}) - \frac{\partial N}{\partial e^a} \mathbf{V}(\nabla e^a, \mathbf{K}). \end{aligned} \quad (58)$$



Вычислим теперь скалярное произведение:

$$(\nabla e^a, \mathbf{K}) = e^b |J| \frac{\partial x^a}{\partial e^b} \frac{\partial e^a}{\partial x^a} = e^b |J| \delta_b^a = |J| e^a.$$

Используя полученное соотношение, перепишем (58) в следующем виде:

$$N(\mathbf{e}) \operatorname{rot}([\mathbf{K} \times \mathbf{V}]) = \operatorname{rot}([N(\mathbf{e})\mathbf{K} \times \mathbf{V}]) - \frac{\partial N}{\partial e^a} \mathbf{K} (\nabla e^a, \mathbf{V}) + \frac{\partial N}{\partial e^a} e^a |J| \mathbf{V}.$$

Подставляя это соотношение в (57) и учитывая (52), получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial e^a} \left[ \frac{\partial e^a}{\partial t} + (\nabla R, \mathbf{V}) \right] \mathbf{K} - 3N(\mathbf{e}) |J| \mathbf{V} - \operatorname{rot}([N(\mathbf{e})\mathbf{K} \times \mathbf{V}]) - \frac{\partial N}{\partial e^a} e^a |J| \mathbf{V}.$$

Учитывая уравнение (I.6.1):

$$\frac{\partial e^a}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} = 0, \quad a = 1, 2, 3. \quad (59)$$

и определение функции  $R = |\mathbf{e}|^2$ , окончательно получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = -\operatorname{rot}([\mathbf{N} \times \mathbf{V}]) - \left( \frac{\partial N}{\partial e^a} e^a + 3N(\mathbf{e}) \right) |J| \mathbf{V}. \quad (60)$$

Это общее соотношение имеет один особый вариант. Другие важные варианты будут рассмотрены в следующих разделах. Этот вариант соответствует выбору функции  $N(\mathbf{e})$  следующего вида:

$$N(\mathbf{e}) = \frac{\varepsilon}{R^3}, \quad (61)$$

где  $\varepsilon = \pm 1$  - знак заряда на данной топологической ячейке. В этом случае  $\mathbf{N} = \mathbf{D}$  и:

$$\frac{\partial N}{\partial e^a} e^a + 3N(\mathbf{e}) = RN'(R) + 3N(R) = 0, \quad R \neq 0.$$

Последнее соотношение обращается в ноль везде, кроме точки  $R = 0$ , т.е. точки экстремума фундаментального потенциала. При этом уравнение (4) примет такой вид:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\operatorname{rot}([\mathbf{D} \times \mathbf{V}]) - 4\pi\varepsilon\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\mathbf{V}, \quad (62)$$

где  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  -  $\delta$ -функция Дирака в точке  $R(\mathbf{x}_0) = 0$ , т.е. в экстремуме фундаментального потенциала рассматриваемой топологической ячейки.

Сравнивая это соотношение с классическим уравнением электромагнитной индукции, приходим к выводу, что напряженность фундаментального магнитного поля, определенная в [21], можно записать в виде:

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{c} [\mathbf{D} \times \mathbf{V}] + \nabla \Phi_H, \quad (63)$$

где  $\Phi_H$  - некоторая дифференцируемая скалярная функция. Наличие потенциальной добавки в определении  $\mathbf{H}$  необходимо в связи с требованием отсутствия у магнитного поля зарядов, что эквивалентно условию:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \operatorname{div}([\mathbf{D} \times \mathbf{V}]) + \Delta \Phi_H = 0.$$

Откуда следует, что потенциал  $\Phi_H$  должен удовлетворять уравнению:

$$\Delta \Phi_h = -\frac{1}{c} \operatorname{div}([\mathbf{D} \times \mathbf{V}]).$$

Соответственно, плотность электрического тока можно теперь представить в виде:

$$\mathbf{j} = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{V}, \quad (64)$$

что соответствует в классической электродинамике току точечного заряда. Электрический ток, определенный соотношением (I.4.5) в [21], отличается тем, что содержит чисто роторную добавку к соотношению (64). Поэтому  $\mathbf{j}$  содержит “чистый” ток точечного заряда, а поле (63) представляет собой полное поле напряженности фундаментального магнитного поля. Наличие тока точечного заряда в правой части (7) проверяется вычислением дивергенции от этого уравнения, что приводит к соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\mathbf{D}) = -\operatorname{div}(\varepsilon \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{V}) = \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)],$$

что и соответствует закону сохранения величины точечного заряда.

Соотношение (64) верно внутри одной простой ячейки. При выполнении условий непрерывности (I.4.5), это соотношение можно распространить на сложные топологические ячейки. В результате общее уравнение для сложных топологических ячеек будет иметь такой вид:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\operatorname{rot}([\mathbf{D} \times \mathbf{V}]) - \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \mathbf{V}. \quad (65)$$

Следуя [22], введем напряженность  $\mathbf{g}$  гравитационного поля в соответствии с определением (II.7.2):

$$\mathbf{g} = \frac{4\pi m_0 G}{3} I(\mathbf{e}) \mathbf{K} = \frac{4\pi m_0 G}{3} \sqrt{1 + R^2/R_0^2} \mathbf{K}, \quad (66)$$

где  $G$  - гравитационная постоянная Ньютона, а  $I(\mathbf{e})$  - массовый множитель, имеющий согласно [22] для каждой простой или пустой топологических ячеек вид:

$$I(\mathbf{e}) = \sqrt{1 + R^2/R_0^2}.$$

Тогда при выборе  $N(\mathbf{e}) = I(\mathbf{e}) 4\pi m_0 G/3$  и  $\mathbf{N} = \mathbf{g}$  получаем уравнение индукции гравитационного поля в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = -\operatorname{rot}([\mathbf{g} \times \mathbf{V}]) - 4\pi G \zeta(R) \rho_D \mathbf{V}, \quad (67)$$

где:

$$\rho_D = m_0 |J| \sqrt{1 + R^2/R_0^2}, \quad \zeta(R) = 1 + \frac{e^a}{3} \frac{\partial \ln I(\mathbf{e})}{\partial e^a} = \frac{1}{3} \frac{3 + 4R^2/R_0^2}{1 + R^2/R_0^2}. \quad (68)$$

**Определение** Векторное поле

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{c} [\mathbf{D} \times \mathbf{V}], \quad (69)$$

представляет собой с точностью до некоторого аддитивного градиентного поля фундаментальное магнитное поле. Векторное поле

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{g} \times \mathbf{V}], \quad (70)$$

представляет собой введенное в [22] гравимагнитное поле, входящее в уравнение (67) индукции гравитационного поля.

### 11. Вычисление массы и вид массовой функции

Используя общий подход к вычислению средних значений по топологическим ячейкам, рассмотрим проблему выбора массовой функции  $I(\mathbf{e})$ , опираясь на общий принцип вычисления массы частиц. Массы частиц являются средним значением функции  $f(\mathbf{x}, t) \equiv 1$ :

$$M = m_0 \int_V |J| I(\mathbf{e}) dV = - \sum_k M_k + m_0 \int_{\partial V} L^\alpha d\sigma_\alpha, \quad (71)$$

где

$$M_k = 4\pi m_0 \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_k} \left[ \mu_k + \int_0^R I(\mathbf{e}) R^2 dR \right] \varepsilon_k, \quad (72)$$

где значения  $\mu_k$  рассчитываются из условия совпадения величин  $M_k$  при вычислении их значений в седловых точках. Заметим, что в экстремумах по определению  $R(\mathbf{x}_k, t) = 0$  и следовательно:

$$M_k = 4\pi m_0 \mu_k \varepsilon_k.$$

Поверхностный интеграл в правой части (71) по определению имеет следующий вид:

$$\int_{\partial V} L^\alpha d\sigma_\alpha = \int_{\partial V} \frac{1}{R^3} \left( \mu_0 + \int_0^R I(\mathbf{e}) R^2 dR \right) |J| \mathcal{K}^\alpha d\sigma_\alpha.$$

Поверхностный интеграл берется по изоповерхности функции  $\mathcal{F}$  и, следовательно, функции  $R$ . После отображения в координаты  $\mathbf{e}$  пространства маркеров, любая изоповерхность функции  $\mathcal{F}$ , ограничивающая простую ячейку отображается в сферу, радиус которой обозначим через  $R_0 = \sqrt{2|\mathcal{F}_s - \mathcal{F}_0|}$ ,  $\mathcal{F}_0$  - значение функции  $\mathcal{F}$  в экстремуме, лежащем внутри простой топологической ячейки, а  $\mathcal{F}_s$  - значение на изоповерхности, по которой берется интеграл. По самому определению отображения  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$  единичный вектор, ортогональный изоповерхности в пространстве  $P^3$ , отображается в постоянный вектор, ортогональный в пространстве маркеров сфере радиуса  $R_0$ , в которую отображается изоповерхность. Поэтому, при замене переменных  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$  можно записать:

$$|J| \mathcal{K}^\alpha d\sigma_\alpha = |J| \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} e^a d\sigma_\alpha = \varepsilon R_0^3 \sin\theta d\varphi d\theta,$$

где  $\varepsilon_0 = \pm 1$  - учитывает направление поля  $\mathcal{K}^\alpha$  на границе, совпадающий со знаком заряда в экстремуме. Переменные  $\varphi$  и  $\theta$  - угловые координаты на соответствующей

сфере в пространстве маркеров. В результате последнее выражение можно представить в виде:

$$\int_{\partial V} L^\alpha d\sigma_\alpha = 4\pi\mu_0\varepsilon + \varepsilon \int_{R=R_0} \int_0^R I(\mathbf{e}) R^2 dR \sin\theta d\varphi d\theta.$$

Двойной интеграл в правой части последнего соотношения представляет собой интеграл по всему объему простой ячейки от функции  $I(\mathbf{e})$ . Аналогичный интеграл содержится в определении величин  $M_k$  (72). Следовательно, информацию о выборе величины  $I(\mathbf{e})$  можно попытаться извлечь из значений масс частиц.

Отметим, что можно провести аналогию между общими рассуждениями о том, как в Специальной теории относительности (СТО) должна вычисляться масса частиц согласно рассуждениям, приведенным в работе [18]. В этой работе приводятся аргументы, что масса частиц в СТО в некотором смысле перераспределяется между частицами в зависимости от модели их строения. Эти рассуждения находятся в соответствии с общей формулой (71).

Одним из наиболее важных фактов, касающихся масс частиц, является то, что их величина во много раз превышает массу электрона. Самой простейшей после электрона заряженной частицей (см. [4]) является мюон. Его масса  $m_\mu$  равна  $\mu \simeq 206.7 m_e$ , где  $m_e$  - масса электрона. Эта величина может служить ориентиром, с помощью которого можно подобрать подходящую функцию  $I(\mathbf{e})$ , чтобы вычисляемая масса частиц была близка к указанным значениям. Поскольку по значению интеграла трудно угадать вид самой функции, то необходимо привлечь и некоторые более общие соображения относительно ее формы. Такими соображениями могут быть предположения о ее общем физическом смысле.

Рассмотрим в начале случай простой топологической ячейки. По определению такая ячейка содержит один экстремум и, возможно, седловые точки на границе. Предположим, что рассматривается простая топологическая ячейка, ограниченная изоповерхностью, на которой нет седловых точек. В этом случае:

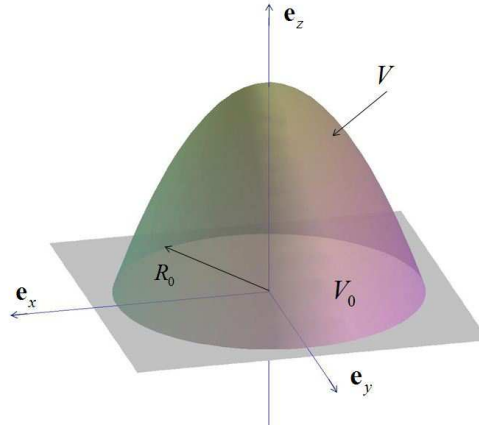
$$\mathcal{M} = m_0\varepsilon \int_{R=R_0} \int_0^R I(\mathbf{e}) R^2 dR \sin\theta d\varphi d\theta,$$

где  $\mu_0$  постоянная интегрирования, а поверхностный интеграл берется по границе простой топологической ячейки. Одним из правдоподобных соображений, позволяющих найти вид  $I(\mathbf{e})$  является предположение, что интеграл:

$$V = \int_{R=R_0} \int_0^R I(\mathbf{e}) R^2 dR \sin\theta d\varphi d\theta \quad (73)$$

представляет собой криволинейный объем пространства геометрических маркеров, соответствующего простой ячейке. Это пространство, как указывалось ранее, является, вообще говоря, неевклидовым. Характер геометрии такого пространства определяется тем, что в координатах  $\mathbf{e}$  уравнение физической гиперповерхности  $V^3$  можно записать в виде:

$$u = \mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{e}^2 = \mathcal{F}_0 + \frac{\varepsilon}{2} R^2. \quad (74)$$



**Рис. 11.** Двумерный аналог области пространства маркеров, соответствующий простой ячейке

Это есть уравнение трехмерного параболоида, вложенного в четырехмерное евклидово пространство. Двумерный аналог представлен на рис.(11). На этом рисунке  $V$  обозначает криволинейный объем параболоида, а  $V_0$  - объем сферы на декартовой карте пространства маркеров.

Исходя из (74), элемент объема пространства маркеров в простой или пустой ячейках можно записать в виде:

$$dV = \sqrt{1 + R^2/R_0^2} R dR d\varphi d\theta.$$

Здесь  $R_0$  - радиус предельной сферы ячейки в пространстве маркеров. В этом случае можно предположить, что массовая функция  $I(\mathbf{e})$  в основной части своей и представляет метрический множитель в объеме ячейки в координатах  $\mathbf{e}$ , т.е.:

$$I(\mathbf{e}) = \sqrt{1 + \frac{R^2}{R_0^2}}. \quad (75)$$

В этом случае легко вычислить интеграл  $V$  (73):

$$V = 4\pi R_0^3 \left[ \frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\ln(\sqrt{2} - 1) \right]$$

Значение этого интеграла можно представить в следующем виде:

$$V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 + R_0^3(1 + 4\pi\alpha), \quad (76)$$

где

$$\alpha = \left[ \frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\ln(\sqrt{2} - 1) - \frac{1}{3} \right] - \frac{1}{4\pi}. \quad (77)$$

Первое слагаемое в выражении (76) представляет собой объем пространства в случае, если пространство маркеров было бы плоским. Второе слагаемое описывает отклонение величины объема от плоского случая и представлено в указанном виде с целью выделить число  $\alpha$ . Числовое значение  $\alpha$  равно:

$$\alpha = \frac{1}{137.9770423} = 0.007247582520.$$



Эта величина отличается от значения постоянной тонкой структуры

$$\alpha_0 = \frac{1}{137.0359998} = 0.0072973525698(24)$$

лишь в пятом знаке после запятой. Это совпадение, хотя и выглядит пока с теоретической точки зрения достаточно случайным, тем не менее с числовой точки зрения говорит в пользу того, что выбор массовой функции в форме (75) представляется в целом правильным, а некоторое отличие от точного значения постоянной тонкой структуры может быть объяснено более общей теорией.

В результате массу простой ячейки (взятую по модулю) можно записать в виде:

$$\mathcal{M} = R_0^3 m_0 \left[ \frac{4}{3} \pi + (1 + 4\pi\alpha) \right].$$

Теперь, используя полученные соотношения, можно записать общую формулу для вычисления массы частиц:

$$M = - \sum_k M_k + 4\pi m_0 \mu_0 + V, \quad (78)$$

$$M_k = 4\pi m_0 \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_k} \left[ m_k + \int_0^R I(\mathbf{e}) R^2 dR \right] \varepsilon_k, \quad (79)$$

Ориентиром для дальнейших вычислений массы может быть следующее формальное совпадение массы мюона с числом:

$$m'_\mu = \frac{3}{2\alpha_0} \simeq 205.5539986,$$

которое меньше массы мюона ( $m_\mu \simeq 206.7 m_e$ ) чуть больше, чем на 1. В то же время число

$$m''_\mu = \frac{3}{2\alpha} \simeq 206.9655635$$

ближе к значению массы мюона.

Вычисление массы реальных частиц в данной работе проводится не будет, поскольку такие вычисления связаны с установлением топологической структуры частиц. Топологическая классификация частиц с общих позиций была рассмотрена в работе [3, 4]. Однако из-за ограниченности размеров данной статьи здесь эта классификация не приводится. Дальнейшей задачей будет рассмотрение общих принципов описания гравитационного поля в рамках данной концепции и некоторые основные следствия.

## 12. Плотность энергии фундаментального электромагнитного поля

Наиболее важным интегралом движения, который определяет локальные и глобальные свойства динамических систем, является интеграл энергии. Одной из важнейших проблем, связанных с энергией, является бесконечность собственной энергии точечных частиц, например, электрона, находящаяся в противоречии с конечностью массы электрона. В связи с этим необходимо выяснить - можно ли в рамках

предлагаемой концепции решить эту проблему, не прибегая к экзотическим приемам вроде теории перенормировок.

Для этого рассмотрим выражение для плотности энергии фундаментального электрического поля, которое можно получить, исходя из уравнений фундаментальной электродинамики. Собственно говоря, вся совокупность уравнений фундаментальной электродинамики нам не понадобится. Важным является интеграл движения уравнений фундаментальной электродинамики, который можно сопоставить плотности энергии электромагнитного поля в теории Максвелла. Это означает, что необходимый интеграл энергии можно искать сразу в форме, аналогичной классической электродинамике, т.е. в виде:

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} D^\alpha E_\alpha dV. \quad (80)$$

Это выражение не содержит слагаемое, аналогичное энергии магнитной составляющей классического электромагнитного поля. Однако будет показано, что именно такая величина является интегралом движения, а соответствующая плотность удовлетворяет дифференциальному закону сохранения.

Задача, которую необходимо решить, можно сформулировать следующим образом. Необходимо при заданном фундаментальном поле индукции  $\mathbf{D}$  подобрать поле фундаментальной напряженности  $\mathbf{E}$ , при котором соотношение (80) будет являться интегралом движения. В качестве подходящей формы поля  $\mathbf{E}$  рассмотрим следующее соотношение:

$$\mathcal{E}^\alpha = f(\mathcal{F}) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha}, \quad (81)$$

где функция  $f(\mathcal{F})$  - некоторая функция от фундаментального потенциала  $\mathcal{F}$ , которую необходимо определить. Исходя из этого и учитывая вид  $\mathbf{D}$  (I.2.7), можно установить, что соотношение

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_{V_i} f(\mathcal{F}) D^\alpha \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha} dV \quad (82)$$

является интегралом движения. Действительно, из (I.2.2), (I.2.7) и (I.2.8) имеем:

$$f(\mathcal{F}) D^\alpha \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha} = \frac{f(\mathcal{F})}{4\pi R} |J| = \frac{f(\mathcal{F})}{4\pi R I(R)} \mathcal{J}.$$

Подставляя последнее соотношение в (80), находим:

$$W = \int_{V_i} \frac{f(\mathcal{F})}{4\pi R I(R)} \mathcal{J} dV. \quad (83)$$

Функция  $I_f = f(\mathcal{F})(4\pi R I(R))^{-1}$  удовлетворяет уравнению (I.12.3). Поэтому  $W$  является интегралом движения. Среди всех интегралов движения вида (82) есть один наиболее простой, соответствующий  $f(\mathcal{F})/I(R) = 4\pi R K$ , где  $K$  - некоторая постоянная. В этом случае имеем:

$$W = K \int_{V_i} \mathcal{J} dV = K M. \quad (84)$$

Это соотношение фактически эквивалентно известной формуле Эйнштейна  $E = Mc^2$  при выборе  $K = c^2$ , где  $c$  - скорость света. Напряженность фундаментального поля при этом будем иметь следующий вид:

$$\mathcal{E}^\alpha = \frac{4\pi R}{I(R)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha} = \frac{4\pi R}{I(R)} \frac{d\mathcal{F}}{dR} \frac{\partial R}{\partial x^\alpha} = \frac{4\pi R^2}{I(R)} \frac{\partial R}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{I(R)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Phi_f, \quad (85)$$

где

$$\Phi_f = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (86)$$

При таком выборе интеграла движения потенциал  $\Phi_f$  фундаментального поля равен объему пространства маркеров на декартовой карте, заключенному внутри шара радиуса  $R$ .

Соотношение (84) примечательно тем, что приводит к наиболее важному результату релятивистской динамики, минуя собственно всю ее идеологию, построенную на инвариантности физики относительно преобразований Лоренца. Этот факт требует отдельного обсуждения, которое будет отложено на конец данной работы. Однако особая важность соотношения (84) для данной теории состоит в том, что оно устанавливает прямую связь между энергией фундаментального поля и массой частицы, а также прямую связь между плотностью масс и плотностью энергии фундаментального поля. Исходя из того, что соотношение должно выполняться для любой простой топологической ячейки, а при определенной модификации и для всех топологических ячеек, можно вместо интегралов писать дифференциальное соотношение между энергией и массой в форме:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{D}, \mathbf{E}) = c^2 \mathcal{J}. \quad (87)$$

### 13. Гравитационное поле

Полученное соотношение для плотности массы и энергии материи (87) позволяет теперь перейти к общему описанию поля тяготения. Представление о поле тяготения определяются законом Ньютона, который, как хорошо известно, выполняется на больших масштабах с большой точностью. Трудности возникают в основном на сверхбольших масштабах. Поэтому естественно предположить, что в рамках данной концепции в уравнения Ньютона должно входить поле тяготения, которое описывается аналогично ньютоновскому полю тяготения. Это означает, что остаточный потенциал  $U$  в уравнении (I.8.4) должен быть связан с полем тяготения. Вместе с тем, поскольку поле тяготения имеет фундаментальный характер, то в рамках теории фундаментальных электромагнитных полей должно найтись соответствующее место и для гравитационного поля.

Основой для введения гравитационного поля может служить соотношение (I.12.6), представляющее общее определение плотности энергии и массы материи, которая входит в правую часть уравнения Пуассона:

$$\Delta \phi_g = 4\pi G \rho_m, \quad (88)$$

где  $\phi_g$  - классический потенциал гравитационного поля,  $G$  - классическая гравитационная постоянная Ньютона,  $\rho_m$  - плотность всей массы материи. Идея привлечения данного соотношения состоит в том, что из самого определения якобиана  $J$

следует тождество:

$$J = \det \left( \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} \right) = \operatorname{div} \left( \varepsilon_{abc} e^a [\nabla e^b \times \nabla e^c] \right). \quad (89)$$

Здесь  $\varepsilon_{abc}$  - антисимметричный символ Леви-Чевитта. Это тождество можно рассматривать, как уравнение Пуассона, поскольку в левой части этого соотношения стоит якобиан, т.е. величина, равная с точностью до размерного множителя плотности массы или энергии материи. При этом поле:

$$g^\alpha = \varepsilon_{abc} e^a [\nabla e^b \times \nabla e^c], \quad (90)$$

можно рассматривать, с точностью до размерного множителя, как напряженность гравитационного поля. Однако для более точного сопоставления этих соотношений с классическим полем тяготения необходимо учесть наличие массовой функции  $I(\mathbf{e}) = \sqrt{1 + R^2/R_0^2}$  в определении массы и плотности материи.

Кроме использования тождества (89) существует более фундаментальный подход. Этот подход, по сути эквивалентный предыдущему, основывается на использовании той же идеологии, что и введение полей фундаментальной электродинамики с помощью тождества (I.2.10). Заметим, что вместе с формальным тождеством (I.2.10) на пространстве маркеров для каждой простой или пустой топологической ячейки выполняется ещё одно очевидное тождество:

$$\frac{\partial e^a}{\partial e^a} = 3. \quad (91)$$

Преобразуя его в координаты на фоновом пространстве с помощью того же фундаментального отображения (I.2.2), получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( |J| \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} e^a \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (|J| \mathcal{K}^\alpha) = 3|J|, \quad (92)$$

где  $\mathcal{K}^\alpha = e^a \partial x^\alpha / \partial e^a$  имеет тот же вид, что и раньше (I.2.7). Умножим это тождество на массовую функцию так, чтобы справа появилась плотность массы в соответствии с определением (I.12.6). Используя определение плотности массы (энергии) (I.12.6), приходим к уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (I(\mathbf{e}) |J| \mathcal{K}^\alpha) = 3\zeta(R) |J| I(\mathbf{e}). \quad (93)$$

Здесь

$$\zeta(R) = 1 + \frac{e^a}{3} \frac{\partial \ln I(\mathbf{e})}{\partial e^a} = \frac{1}{3} \frac{3 + 4R^2/R_0^2}{1 + R^2/R_0^2}, \quad (94)$$

а при выводе использовалось тождество:

$$|J| \mathcal{K}^\alpha \frac{\partial I(\mathbf{e})}{\partial x^\alpha} = |J| e^a \frac{\partial I(\mathbf{e})}{\partial e^a} = |J| \frac{R^2}{R_0^2 \sqrt{1 + R^2/R_0^2}}.$$

Умножая (93) на подходящий размерный множитель  $4\pi G m_0/3$ , где  $G$  - классическая постоянная тяготения Ньютона, а  $m_0$  - размерный множитель массы, приходим к уравнению, имеющему вид уравнения Пуассона (88), но в более общем виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = 4\pi G \zeta(R) \rho_m, \quad (95)$$

где  $\rho_m = m_0 \sqrt{1 + R^2/R_0^2} |J|$  - плотность массы, а поле  $\mathbf{g}$  с компонентами:

$$g^\alpha = \frac{4\pi m_0 G}{3} |J| I(\mathbf{e}) \mathcal{K}^\alpha = \frac{4\pi m_0 G}{3} |J| \sqrt{1 + R^2/R_0^2} \mathcal{K}^\alpha. \quad (96)$$

играет роль напряженности гравитационного поля. Подчеркнём, что эти соотношения выполняются для простой или пустой топологических ячеек, а общее представление о поле тяготения должно дополняться условиями “срачивания” полей отдельных ячеек на их границах. Кроме этого, необходимо указать, как это поле проявляет себя в усредненной динамике частиц, описываемой усредненными уравнениями Ньютона и уравнениями Шредингера.

#### 14. Эффективная гравитационная постоянная и тёмная материя

Уравнение (95) представляет собой уравнение Пуассона, но в отличие от классического Ньютонического поля в это уравнение входит эффективная гравитационная постоянная  $\tilde{G}$ :

$$\tilde{G} = \zeta(R) G = \frac{G}{3} \frac{3 + 4R^2/R_0^2}{1 + R^2/R_0^2}. \quad (97)$$

Постоянная тяготения  $\tilde{G}$  отличается от классической тем, что зависит от координат и времени, поскольку от координат зависит функция  $R = \sqrt{2|\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)|}$ . Однако форма этой зависимости такова, что эффективная постоянная тяготения меняется от значения классической  $G$  в точке  $R = 0$ , где располагается экстремум  $\mathcal{F}$  со значением  $\mathcal{F}_0$  и не превышает значения  $4G/3$  на границах топологических ячеек, где  $R$  заметно отличается от нуля. Этот эффект зависимости  $\tilde{G}$  от  $R$  можно интерпретировать, как наличие скрытой массы, если считать, что преобразованию подвергается не постоянная  $G$ , а именно плотность массы:

$$\tilde{\rho}_m = \rho_m \zeta(R). \quad (98)$$

В этом случае увеличение плотности массы будет обнаруживаться на краях топологических ячеек. Следует подчеркнуть, что в таком простом виде это соотношение справедливо лишь для простых топологических ячеек.

Этот эффект можно сравнить с тем, что наблюдается в астрофизических экспериментах по исследованию эффекта “тёмной материи”. Эффект тёмной материи проявляется в том, что именно на краях галактик скорость орбитального движения звезд вокруг центральных частей галактик превышает значения, которые предсказываются теорией тяготения Ньютона на основе вычисления тяготеющей массы совокупности звезд из термодинамических соображений при условии теплового равновесия звездной среды. С точки зрения соотношения (98), объяснение эффекта темной материи может состоять в том, что каждая галактика представляет собой топологическую ячейку, а видимое в гравитационных экспериментах увеличение массы определяется величиной:

$$\Delta M = \int_V \rho_m (\zeta(R) - 1) dV = \frac{1}{3} \int_V \rho_m \frac{R^2/R_0^2}{1 + R^2/R_0^2} dV = \frac{1}{3} \left( M - \int_V \frac{\rho_m}{1 + R^2/R_0^2} dV \right) > 0.$$



В связи с этим функцию:

$$\rho_{DM} = \rho_m \left( \zeta(R) - 1 \right) = \frac{e^a}{3} \frac{\partial \ln I(\mathbf{e})}{\partial e^a}, \quad (99)$$

можно назвать плотностью темной материи. Из этого соотношения следует, что дополнительная гравитирующая масса любой топологической ячейки не будет превышать инерционную более, чем на 1/3 от ее значения. Наблюдаемые значения скрытой гравитирующей массы в галактиках имеют значения, превышающие инертную в 10 и более раз. Это говорит о том, что для галактик эффект должен описываться более общей массовой функцией, чем  $I(\mathbf{e}) = \sqrt{1 + R^2/R_0^2}$ , которая описывает массу простых и пустых топологических ячеек. Если вспомнить, что масса - это по сути объем пространства маркеров всех ячеек вместе взятых, то при большом их объединении эффект может существенно возрасти, учитывая, что барионы, в соответствии с топологической классификацией частиц, являются многосвязными объектами (ручками Уилера) [4]. Многосвязные области могут существенно увеличивать скрытую массу. Возможны и другие геометрические эффекты. Поэтому относительно слабое увеличение гравитирующей массы простых и пустых топологических ячеек лишь указывает на то, что эффект темной материи не обнаруживается в локальных экспериментах. Исходя из этого, можно предположить, что уравнения для гравитационного поля (95) и (96) на больших масштабах остаются справедливыми, но при некоторой другой функции  $I(\mathbf{e})$ , вид которой необходимо вычислять, усредняя по всей совокупности топологических ячеек.

## 15. Вихревое гравитационное поле и электромагнитные поля

Еще одним важным аспектом рассматриваемой теории гравитационного поля является то, что она приводит к необходимости рассматривать “вихревые” гравитационные поля, которые тесно связаны с фундаментальными электромагнитными полями. Продифференцировав уравнение (95) по  $t$ , в результате получим следующее уравнение:

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = 4\pi G \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = -4\pi G \operatorname{div}(\rho_m \mathbf{V}).$$

Здесь использовалось уравнение неразрывности (I.12.7) для  $\rho_m$ . Отсюда следует уравнение, имеющее следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = -4\pi G \rho_m \mathbf{V} + \operatorname{rot} \mathbf{Z}, \quad (100)$$

где  $\mathbf{Z}$  - некоторое вспомогательное поле. Это уравнение можно формально сравнить с уравнением Максвелла - дифференциальным аналогом уравнения электромагнитной индукции. При этом  $\mathbf{g}$  играет роль индукции гравитационного поля, поле  $\mathbf{p} = 4\pi G \rho_m \mathbf{V}$  - роль плотности тока массы, а  $\mathbf{Z}$  - напряженности некоторого вихревого поля. В соответствии с этим поле  $\mathbf{Z}$  можно назвать гравиомагнитным полем. По своему смыслу поле  $\mathbf{p} = 4\pi G \rho_m \mathbf{V}$  представляет собой плотность импульса среды, что вполне аналогично плотности тока заряда в классической электродинамике.

Отметим, что на существование описания гравитационного поля на основе аналогии между электродинамикой и ньютоновской гравитацией было обращено в ра-

боте [18]. В этой работе был рассмотрен целый ряд аналогий, связывающих электродинамику и гравитацию. Этот анализ важен для общего понимания свойств гравитационного поля. В этой работе также содержится указание на возможную прямую связь между электрическими полями и полем тяготения. В предлагаемой теории все эти связи и аналогии возникают естественным образом.

Полученное уравнение (95) имеет несколько важных отличий от классического уравнения Пуассона. Во-первых, напряженность гравитационного поля, согласно (96), не является чисто градиентным полем, как это определяется в теории тяготения Ньютона, и содержит вихревую компоненту. Во-вторых, согласно тому же соотношению (96), гравитационное поле в данном подходе оказывается связанным с фундаментальным электромагнитным полем, что объединяет эти взаимодействия в одно фундаментальное поле, связанное с геометрией физического пространства, как трехмерной гиперповерхности, вложенной в евклидово пространство  $W^4$  размерности 4.

Формулы прямой связи параметров фундаментального электромагнитного поля и параметров гравитационного можно получить непосредственно из определения последнего соотношением (96). Имеем:

$$g^\alpha = \frac{4\pi G}{3} \rho_m \mathcal{K}^\alpha = \frac{4\pi G}{3} I(\mathbf{e}) R^3 \mathcal{D}^\alpha = G m_0 I(\mathbf{e}) \Phi_f \mathcal{D}^\alpha. \quad (101)$$

Отсюда следует, что компоненты поля напряженности гравитационного поля связаны с точностью до множителя  $m_0 G I(\mathbf{e}) \Phi_f$  с индукцией фундаментального электромагнитного поля  $\mathbf{D}$ . Таким образом, фундаментальные электромагнитные поля являются источниками всех явлений, которые наблюдаются в форме различных типов взаимодействий - электромагнитного, гравитационного и ядерных взаимодействий (сильного и слабого). Фундаментальные поля проявляют себя как ядерные силы в случае многосвязности физической гиперповерхности пространства (сильное взаимодействие) и в случае возникновения топологических перестроек границы топологических ячеек (слабое взаимодействие), как это было описано в [4].

## Литература

1. Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленными зарядами и топология / В.М. Журавлев // Гравитация и электромагнетизм: тр. межд. конф. - Минск, 1998. - С. 42-50.
2. Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленными зарядами и топология / В.М. Журавлев // Изв. вузов. Физика. - 2000. - № 2. - С. 134-140.
3. Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленными зарядами, топология и структура элементарных частиц / В.М. Журавлев // Критич. технол. и фундамент. пробл. физики конденсир. сред.: материалы конференции. - Ульяновск, 2001. - С. 42-72.
4. Zhuravlev V.M. A topological interpretation of quantum theory and elementary particle structure / V.M. Zhuravlev // Gravitation and Cosmology. - 2011. - Vol. 17, № 3. - P. 201-217.
5. Misner C.W. Classical physics as geometry / C.W. Misner, J.A. Wheeler // Ann. Phys. - 1957. - №2. - P. 525-537.
6. Уилер Дж. Гравитация, нейтрино и Вселенная / Дж. Уилер. - М.: ИЛ, 1962. - 352 с.
7. Мизнер Ч. Классическая физика как геометрия / Ч. Мизнер, Дж. Уилер // Альберт Эйнштейн и теория гравитации: сб. статей. М.: Мир, 1979. - С. 542-554.

8. Сахаров А.Д. Топологическая структура элементарных зарядов и СРТ-симметрия / А.Д.Сахаров // Проблемы теоретической физики. - 1972. - С. 542-554.
9. Клиффорд В. О пространственной теории материи / В. Клиффорд // Альберт Эйнштейн и теория гравитации: сб. статей. М.: Мир, 1979. - С. 36-37.
10. Шварц А.С. Квантовая теория поля и топология / А.С. Шварц. - М.: Наука, 1989. - 400 с.
11. Милнор Дж. Дифференциальная топология. Начальный курс / Дж. Милнор, А. Уолле. - М.: Мир, 1972.
12. Шапиро И.С. Топология для физиков / И.С. Шапиро, М.А. Ольшанецкий // Элементарные частицы (Шестая школа ИТЭФ): сб. статей. - М: ИТЭФ, 1979. - № 4. - С. 5-60.
13. Фейнман Р. Характер физических законов / Р. Фейнман. - М.: Мир, 1968. - С. 193-208.
14. Постников М.М. Введение в теорию Морса / М.М. Постников. - М.: Наука, 1971. - 561 с.
15. Хирш М. Дифференциальная топология / М. Хирш. - М.: Мир, 1979. - 280 с.
16. Дубровин Б.А. Современная геометрия. Методы теории гомологий / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. - М.: Наука, 1984. - 343 с.
17. Дубровин Б.А. Современная геометрия. Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. - М.: Наука, 1979. - 760 с.
18. Бриллюэн Л. Новый взгляд на теорию относительности / Л. Бриллюэн. - М.:Мир, 1970. - С. 142.
19. Журавлев В.М. Многомерные нелинейные волновые уравнения с многозначными решениями / В.М. Журавлев // ТМФ. - 2013. - Т. 174, № 2. - С. 236-246.
20. Журавлев В.М. Многомерные нелинейные волновые уравнения и комплексные квазилинейные уравнения первого порядка / В.М. Журавлев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2013. - Вып. 4. - С. 56-67.
21. Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля (Часть I) / В.М. Журавлев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2014. - Вып. 4. - С. 6-24.
22. Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля. (Часть II). Масса и гравитация / В.М.Журавлев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2014. - Вып. 4. - С. 25-39.
23. Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля. (Часть III). Уравнения индукции фундаментальных полей / В.М.Журавлев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2015. - Вып. 3. - С. 44-60.
24. Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля. (Часть IV). Топологическая структура частиц / В.М.Журавлев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. - 2015. - Вып. 4. - С. 1-15.
25. Журавлев В.М. Многомерные квазилинейные уравнения первого порядка и многозначные решения уравнений гиперболического и эллиптического типа / В.М.Журавлев // ТМФ. - 2015. - Т. 186, № 3. - С. 371-385.